

Untersuchungen an supraleitenden einlagigen Spulen und an Hohlzylindern bei kreisförmiger Strombelastung

Von FRITZ VON BALLMOOS

Mit 6 Textabbildungen

(Eingegangen am 17. August 1959)

Es wird der Zwischenzustand eines Hohlzylinders untersucht, der von zirkularen Strömen durchflossen wird. Für überkritische axiale Magnetfelder im Hohlzylinderinneren bildet sich auf der Außenseite desselben eine dünne Zwischenzustandsschicht, in der abhängig vom Feld im Innern der kritische Strom I_c fließt. Auf Grund dieser Stromverteilung wird als Widerstandsübergangsverlauf $\frac{R}{R_n} = 1 - \frac{H}{H_c}$ hergeleitet, der durch statische Messungen an einlagigen Spulen und durch ein dynamisches Verfahren an einem Hohlzylinder bestätigt wird.

Einleitung

Viele technische Anwendungen der Supraleitung in der Schalttechnik beruhen auf der Zerstörung der Supraleitfähigkeit durch Magnetfelder. Die Brauchbarkeit einer solchen Anordnung hängt oft von der Art des Zwischenzustandes ab, in dem sich das Material befindet, wenn es weder vollständig supraleitend noch vollständig normalleitend ist. Bei gewissen Anwendungen, so z.B. beim Cryotron [1] oder beim Gleichrichter und Verstärker nach OLSEN [2] muß dieses Zwischenzustandsgebiet möglichst rasch durchlaufen werden. Andere Anordnungen, wie z.B. der supraleitende Verstärker nach GYGAX [3], arbeiten dauernd im Zwischenzustandsgebiet. Bei diesen Anwendungen sollte der Zwischenzustand möglichst stetig sein. Daher ist es für den Bau von supraleitenden Schaltelementen wichtig, das Verhalten des Zwischenzustandes bei verschiedenen Anordnungen zu untersuchen. Für viele Leiterformen hat man diesen Zwischenzustand untersucht und hat dadurch ein Bild über die darin vorhandene Verteilung des normal- und supraleitenden Materials gewonnen. Bis dahin aber fehlten solche Untersuchungen für Hohlzylinder, die von zirkularen Strömen durchflossen werden.

Einen wichtigen Platz unter den Elementen nehmen die supraleitenden Spulen ein, bestehen doch alle die in den Referenzen 1 bis 3 beschriebenen Schaltungen aus solchen Spulen. Ihre Untersuchung ist insofern etwas schwierig, als die Feldverhältnisse in der Nähe der Drahtoberfläche nicht genau angegeben werden können. Eine einlagige Spule läßt sich aber durch einen dünnwandigen Hohlzylinder annähern. Der Vorteil einer solchen Näherung liegt darin, daß beim Hohlzylinder eindeutige Feldverhältnisse herrschen.

In der vorliegenden Arbeit wird theoretisch und experimentell das Verhalten von einlagigen Spulen und Hohlzylindern beschrieben, die von zirkularen Strömen durchflossen werden. Über weitere Messungen an mehrlagigen dicken supraleitenden Spulen soll in einer späteren Arbeit berichtet werden.

Der Zwischenzustand des Hohlzylinders

Der Verlauf des Magnetfeldes $H(r)$ in einem normalleitenden, dünnwandigen Hohlzylinder der Länge l , den Radien r_1 und r_2 (wobei $r_1 < r_2$ ist), läßt sich durch

$$H(r) = \int_r^{r_2} j_n dr = j_n (r_2 - r)$$

beschreiben, da ja wegen der angenommenen Dünnwandigkeit die Stromdichte j_n unabhängig von r , also konstant, ist. Das Magnetfeld steigt vom Wert Null an der Außenwand des Hohlzylinders linear auf $j_n(r_2 - r_1)$ an, um im Hohlraum konstant zu bleiben (Abb. 2).

Im Falle eines supraleitenden Hohlzylinders muß die magnetische Induktion B in der Wand infolge des Meißner-Effektes [4] praktisch den Wert Null besitzen. Die Stromdichte wird dort wegen $dH/dr = j$ gleich Null. Der gesamte Strom I kann deshalb nur an der Innenwand fließen, wobei seine Größe auf einen solchen Wert beschränkt ist, daß das axiale Magnetfeld im Innern den Betrag H_c des kritischen Feldes nicht überschreitet: $H = I/l < H_c$.

Für den Fall, daß ein fester gegebener Strom durch die Hohlzylinderwand fließt, der auf der Innenseite desselben ein Feld erzeugt, das den Wert H_c überschreitet, bricht dieser stabile Zustand zusammen. Man sollte zunächst erwarten, daß sich dann an der Innenwand eine normalleitende Schicht bildet. Da aber die elektrische Leitfähigkeit des supraleitenden Zustandes unendlich viel größer ist als im normalleitenden Material, wird der gesamte Strom durch die supraleitenden Bereiche fließen. An der Trennfläche der normal- und supraleitenden Schicht wäre dann wieder ein überkritisches Feld vorhanden, wodurch die normalleitende Schicht auf Kosten der supraleitenden anwüchse.

Ein stabiler Zustand wird sich nach unserer Ansicht erst wieder einstellen, wenn das gesamte Material des Hohlzylinders normalleitend ist und nur in einer dünnen Schicht an der Außenwand gerade die kritische Stromdichte vorhanden ist. Diese dünne Schicht muß aus einer Art Zwischenzustand bestehen, da hier aus Symmetriegründen der gleiche elektrische Spannungsabfall entstehen muß wie im normalleitenden Material. Wird der Hohlzylinderstrom dagegen durch einen Induktionsvorgang zum Fließen gebracht, bleibt dieser nicht konstant, da beim Wandern der Phasengrenze nach außen die magnetische Feldstärke abnimmt (damit sich der Gesamtfluß nicht ändert). Bei der von uns angenommenen Dünnwandigkeit des Hohlzylinders verändert dieser Effekt jedoch auch bei Feldwerten, die nur wenig größer sind als H_c , die oben beschriebene Verteilung des normal- und supraleitenden Materials nicht.

Die Struktur der Zylinderaußenwand sollte dann der in Abb. 1 wiedergegebenen Darstellung entsprechen.

Der Anteil des normalleitenden Materials innerhalb der Zwischenzustandsschicht wird deshalb von der Größe des Stromes durch das übrige normalleitende Material des Hohlzylinders bestimmt. Hat der Gesamtstrom die kritische Größe I_c , so verschwinden die normalleitenden Lamellen in der dünnen Zwischenzustandsschicht, weil dann kein Strom durch das

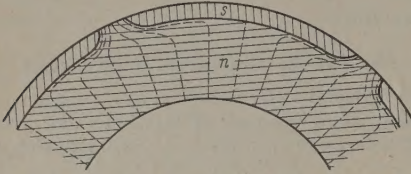


Abb. 1. Zwischenzustand des Hohlzylinders bei überkritischen, zirkularen Strömen. n normalleitendes Material, s supraleitendes Material, ----- Äquipotentiallinien

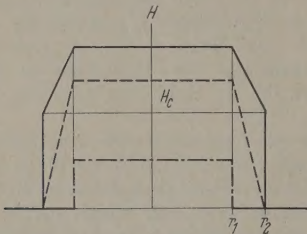


Abb. 2. Verlauf des axialen Magnetfeldes über den Querschnitt eines normalleitenden -----, eines supraleitenden - - - - - und eines Hohlzylinders im Zwischenzustand ———

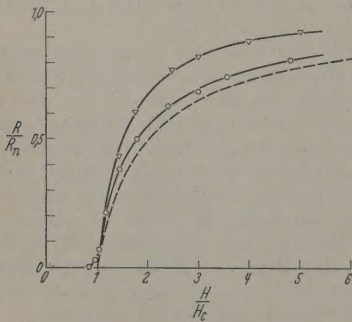


Abb. 3. Widerstandsübergangskurven. ----- Theoretischer Verlauf bei einem Hohlzylinder; gemessene Kurven an einer Indiumflachbandspule
—△—△— $T = 3,365^\circ \text{K}$; —○—○— $T = 3,17^\circ \text{K}$

Innere des Hohlzylinders fließt und damit der Spannungsabfall zu Null wird. Bei größer werdendem Totalstrom I muß auch der Anteil des normalen Materials der dünnen Randschicht größer werden, damit der dort fließende kritische Strom I_c den gleichen Spannungsabfall verursacht wie $I - I_c$ im Innern.

Der Feldverlauf bei überkritischer Strombelastung ist der folgende: Das Feld an der Außenseite des Hohlzylinders hat den Wert Null; es steigt innerhalb der dünnen Zwischenzustandsschicht auf den Wert H_c an, um dann linear über das Gebiet des normalleitenden Materials zuzunehmen (Abb. 2), da die Stromdichte im normalleitenden Material konstant ist und den Betrag $j_n = \frac{I - I_c}{l(r_2 - r_1)}$ hat. Das Magnetfeld besitzt im Hohlraum des Hohlzylinders den konstanten Wert $H = I/l$ [A/m].

Zum Vergleich möchten wir hier einige Beispiele von Zwischenzustandsanordnungen in anderen Leiterformen angeben.

Der lange Zylinder im Längsfeld geht bei kleinen Meßströmen vollständig in den Normalzustand über, sobald der kritische Feldwert überschritten wird [5]. Verbreiterungen der Übergangskurve rühren von Inhomogenitäten der Probe und auch vom Meßstrom her.

Anders verhält sich der Zylinder im Quersfeld. Ein Widerstand läßt sich bereits messen, wenn das Quersfeld den Wert $H_c/2$ erreicht hat. Zwischen $H_c/2$ und H_c befindet sich das Material im Zwischenzustand, und erst über H_c wird es vollständig normalleitend [6]. In diesem Zwischenzustand muß der Zylinder in dünne normal- und supraleitende Lamellen aufgeteilt sein, deren Ebenen senkrecht zur Stromdurchflußrichtung stehen.

Beim stromdurchflossenen, langen Zylinder im Eigenfeld [7] bildet sich eine Kette supraleitender Eigenkegel, die von normalleitenden Gegenkegeln umgeben sind, sobald das vom Belastungsstrom herrührende Magnetfeld an der Peripherie des Zylinders die kritische Größe erreicht hat. Bei weiterem Erhöhen des Stromes entsteht um die Kegel herum ein Mantel aus vollständig normalleitendem Material, während die Kegel (d. h. der Zwischenzustandskern) immer stärker zusammenschrumpfen.

RINDERER [8] hat die Zerstörung der Supraleitung in langen Zylindern durch Ströme in Längs- und Quersfeldern untersucht. In seiner Arbeit zeigt er, daß der Zwischenzustandskern durch Quersfelder aus der zentralen Lage nach außen verschoben wird.

Es ist interessant festzustellen, daß MEISSNER und ZDANIS [9] bei kürzlichen Messungen an Hohlzylindern mit ganz anderen Strom- und Feldrichtungen (ein axialer Strom erzeugt ein zirkuläres Feld) mit kleinen Meßströmen eine ähnliche Struktur gefunden haben wie wir bei unserer Anordnung.

M. NÄHBAUER [10] führte dynamische Messungen an Hohlzylindern mit zirkularen Magnetfeldern aus, wobei er die Geschwindigkeit der Phasengrenze des normal- und supraleitenden Materials bei der Zerstörung der Supraleitung untersuchte.

Mit der oben beschriebenen Stromverteilung im Falle eines überkritischen Gesamtstromes, läßt sich der Widerstandsübergang vom normal- in den supraleitenden Zustand und umgekehrt leicht angeben [11]. Wenn R_n der Normalwiderstand des Hohlzylinders über dem Sprungpunkt bedeutet, beträgt der Spannungsabfall

$$U = R_n \cdot I_n,$$

wobei mit I_n der Strom, der durch das normalleitende Material fließt, bezeichnet ist. Dieser stellt die Differenz zwischen dem totalen Strom I und dem in der dünnen Zwischenzustandsschicht vorhandenen Strom I_c dar. Der von außen meßbare Widerstand ist der Quotient aus Spannung und Totalstrom:

$$R = R_n \frac{I - I_c}{I}.$$

Da alle Größen auf einen Hohlzylinder der Länge l bezogen sind, läßt sich diese Beziehung in der Form

$$\frac{R}{R_n} = 1 - \frac{H_c}{H}$$

schreiben. Diesem Widerstandsverlauf entspricht die gestrichelte Kurve von Abb. 3.

Messungen

1. Messungen an einer Flachbandspule

Zur experimentellen Bestätigung der obigen Ergebnisse haben wir den Hohlzylinder durch eine lange Spule bestehend aus Indiumflachband der folgenden Dimensionen ersetzt: Spulenlänge 160 mm, Spulendurchmesser 10,5 mm, Bandbreite 3,18 mm, Bandstärke 0,127 mm. Der Wert H/I dieser Spule beträgt 4 m^{-1} ($= 3,56 \text{ Oe/A}$). Der spezifische Widerstand $\rho_{3,4}$ des verwendeten Indiums hat den Wert $10^{-11} \Omega \text{m}$. Um Verfälschungen der Meßresultate infolge von Randeffekten der Spule zu vermeiden, sind die Spannungsmessungen um je ein Viertel der Spulenlänge nach innen verlegt worden. Die Stromrückführung erfolgt durch ein dünnes konzentrisches Kupferrohr von 30 mm Durchmesser. Diese Anordnung erlaubt uns die Messung des Totalstromes und des Spannungsabfalles an den Windungen. Der Nachteil der Näherung liegt darin, daß durch den notwendigen Abstand von Windung zu Windung sowie durch die Kanten des Flachbandes die Stromverteilung und der Feldverlauf von denjenigen im Hohlzylinder abweichen. In Abb. 3 werden die gemessenen Punkte mit dem theoretischen Verlauf des Widerstandsüberganges verglichen. Wie man erwarten war, setzen die Übergangskurven nicht scharf beim kritischen Strom ein. Die Ursachen für dieses Verhalten können durch die nichtideale Oberfläche und die Kanten des Bandes erklärt werden.

Als kritisches Feld wird der Schnittpunkt der Tangente des Wendepunktes mit der H -Achse angenommen. Diese Werte stimmen mit den in der Literatur angegebenen sehr gut überein. Die Messungen zeigen weiter, daß die Abweichungen von der berechneten Widerstandsübergangskurve bei kleinen kritischen Feldern größer sind als bei höheren. Die größten Abweichungen treten jeweils bei Feldern von 2 bis $4 H_c$ auf. Eine Abschätzung der Widerstandsänderung infolge von Joulescher Wärme führt für die gemessene Probe auf die Beziehung $\frac{\Delta R}{R} = 6,5 \cdot 10^{-4} \left(\frac{H}{H_c} - 1 \right)$. Die Wärmeübergangszahl ist Messungen von KARAGOUNIS [12] entnommen worden. Nach der obigen Beziehung sollte $\frac{\Delta R}{R}$ proportional mit $\left(\frac{H}{H_c} - 1 \right)$ zunehmen, was bei unseren Messungen nicht der Fall ist. Diese Tatsache scheint darauf hinzuweisen, daß nicht Erwärmung der Probe Grund der Abweichungen sein kann.

2a. Dynamisches Verhalten eines Hohlzylinders

Die folgenden Untersuchungen sollen dazu dienen, den im ersten Teil dieser Arbeit hergeleiteten und an einer Flachbandspule gemessenen Widerstandsübergangsverlauf an einem Hohlzylinder zu bestätigen.

Die einfachste Anordnung, mit der dies ausgeführt werden kann, ist ein Transformator, wobei der Hohlzylinder als Sekundärwicklung mit einer Windung angesehen werden kann (Abb. 4). Wenn Streufelder vernachlässigt werden, lauten die entsprechenden Maschengleichungen

$$R_1 i_1 - U_1 = - \frac{d\Phi_1}{dt}$$

und

$$R_2 i_2 = - \frac{d\Phi_2}{dt}$$

worin die Induktionsflüsse die Größen $\Phi_1 = L_1 i_1 - L_{12} i_2$ und $\Phi_2 = -L_{21} i_1 + L_{22} i_2$ besitzen.

Ein normalleitender Hohlzylinder hat den konstanten Widerstand R_2 . Für den Fall, daß an die Eingangsklemmen ein Spannungssprung von Null bis U_1 gelegt und wir die vereinfachende Annahme machen, daß die Zeitkonstante $\tau_1 = L_1/R_1$ des Primärkreises viel kleiner ist als diejenige des Sekundärkreises, $\tau_2 = L_2/R_2$, läßt sich die Lösung dieses Differentialgleichungssystems leicht angeben:

$$i_2 = \frac{1}{R_1} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} U_1 e^{-\frac{t}{\tau_2}}.$$

Befindet sich der Hohlzylinder im Zwischenzustand dann ist sein Widerstand abhängig vom Hohlzylinderstrom: $R = R_2 \left(1 - \frac{I_c}{i_2} \right)$; mit R_2 wird nach dem Vorangehenden der Widerstand über dem Sprungpunkt

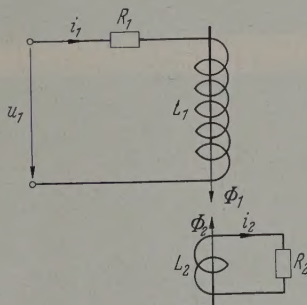


Abb. 4. Der Hohlzylinder als Sekundärwicklung eines Transformators

bezeichnet. Der Strom, der nach dem Einschalten der Primärspannung fließt, klingt dann nach dem Gesetz

$$i_2 = \frac{1}{R_1} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \left[(U_1 - U_{1c}) e^{-\frac{t}{\tau_2}} + U_{1c} \right]$$

gegen den Wert I_{2c} ab, da U_{1c} jene Primärspannung bedeutet, die im Hohlzylinder gerade den kritischen Strom zum Fließen bringt. Für Spannungssprünge $U_1 < U_{1c}$ geht die letzte Beziehung in die Form

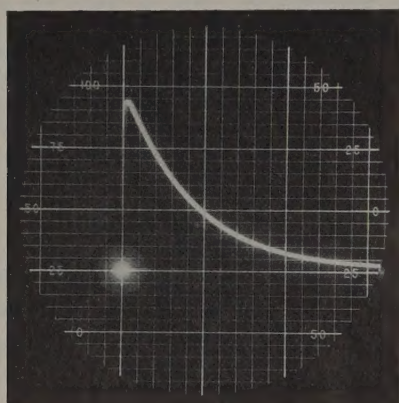
$$i_2 = \frac{1}{R_1} \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} U_1$$

über, die besagt, daß ein Transformator mit supraleitender Sekundärwicklung auch Gleichströme transformieren kann.

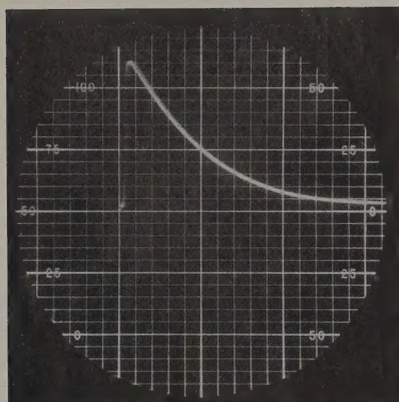
Interessant an der zweitletzten Beziehung ist der Umstand, daß das Abklingen des Sekundärstromes mit der gleichen Zeitkonstanten L_2/R_2 erfolgt, wie im Falle des vollständig normalleitenden Hohlzylinders. Der Unterschied liegt nur darin, daß im ersten Fall der Strom bei überkritischen Feldern exponentiell gegen I_c abklingt, während er über der Sprungtemperatur für alle Felder nach Null strebt.

Nach den Ergebnissen des letzten Abschnittes ist dieses Verhalten leicht zu verstehen. In der Hohlzylinderaußenwand fließt für $i_2 > I_{2c}$ gerade der kritische Strom I_{2c} , der an der Phasengrenze das Feld H_c erzeugt. Der noch verbleibende Strom $i_2 - I_{2c}$ verteilt sich gleichmäßig über den Querschnitt des normalleitenden Materials, wo er infolge des Widerstandes mit der Zeitkonstanten L_2/R_2 ausstirbt.

In der Zwischenzustandsschicht ist immer soviel normalleitendes Material vorhanden, daß der Spannungsabfall darin, verursacht durch den kritischen



a



b

Abb. 5a u. b. Zeitlicher Verlauf der Meßspannung des Zinn-Hohlzylinders.
a Bei Normalleitung 3,8° K. b Im Zwischenzustand 3,56° K; $U_1 = 8U_{1c}$.
Die Horizontalablenkung beträgt in beiden Fällen 10 msec/Einheit

Strom, längs dem Umfang gleich groß ist wie der Potentialabfall im normalleitenden Material. Sobald der Strom dort infolge des Widerstandes ausgestorben

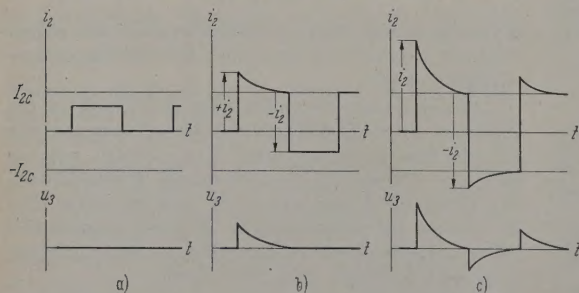


Abb. 6a—c. Verlauf der Meßspannung U_3 bei mehrmaligem Ein- und Ausschalten.
a) $U_1 < U_{1c}$, b) $U_{1c} < U_1 < 2U_{1c}$, c) $U_1 > 2U_{1c}$

ist, befindet sich auch kein normalleitendes Material mehr in der dünnen Schicht an der Zylinderaußenwand. Diese ist deshalb wieder vollständig supraleitend und der kritische Strom I_{2c} kann darin unbeschränkte Zeit weiterfließen.

Zur Messung des Hohlzylinderstromes wird eine Meßspule als tertiäre Wicklung um den Hohlzylinder gewickelt. Wenn der Widerstand in diesem Kreis sehr groß gehalten wird, läßt sich die induzierte Spannung aus der Beziehung

$$U_3 = -L_{13} \frac{di_1}{dt} - L_{23} \frac{di_2}{dt}$$

bestimmen. Unter Berücksichtigung der oben gemachten Annahmen und Vereinfachungen, und wenn von kurzzeitigen Einschaltvorgängen abgesehen wird, läßt sich der zeitliche Verlauf durch

$$U_3 = \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{L_2} \frac{1}{R_2 R_1} e^{-\frac{t}{\tau_2}} (U_1 - U_{1c}) \quad \text{für } U_1 \geq U_{1c}$$

beschreiben. Diese Spannung hat bis auf eine Konstante den gleichen Verlauf wie der Hohlzylinderstrom. Eine Spannung wird nur dann induziert, wenn der Spannungssprung im Primärkreis größer als die kritische Wert U_{1c} ist.

2b. Meßanordnung und Meßergebnisse

Die Primärwicklung des im letzten Abschnitt besprochenen Transformators ist im Inneren des Hohlzylinders angeordnet. Sie besteht aus Lötzinndraht von 0,6 mm Durchmesser, besitzt 114 Windungen (N_1), eine Länge l_1 von 69 mm und einen inneren Radius r_1 von 9 mm. Bei den von uns angelegten Feldern befindet sich der Lötzinndraht in supraleitendem Zustand. Dadurch verdampft der Primärstrom durch Joulesche Wärme nicht unnötig Helium. Die Zeitkonstante des Primärkreises liegt in der Größenordnung 1 μ sec.

Der Hohlzylinder besteht aus Reinstzinn, das um ein Neusilberrohr gegossen wurde. Seine Dimensionen: Länge l_2 50 mm, mittlerer Radius r_2 10,5 mm und Wandstärke d 1 mm. Infolge des relativ großen spezifischen Widerstandes des Neusilbers bei tiefen Temperaturen kann dessen Einfluß auf das Meßergebnis vernachlässigt werden. Als Meßspule dient eine Wicklung, die unmittelbar auf dem Hohlzylinder liegt und 500 Windungen bei einer Länge von 47 mm besitzt.

Die Zeitkonstante des Sekundärkreises läßt sich ohne allzugroßen Fehler mittels der Beziehung:

$$\tau_2 = \frac{\mu_0}{2} \frac{r_2 d}{\varrho_{2,8}} \quad \text{ermitteln.}$$

Der Restwiderstand $\varrho_{2,8}$ des verwendeten Reinstzinns kann durch Messung der Zeitkonstanten $\tau_{2(300)}$ und $\tau_{2(3,8)}$ bestimmt werden, da die Induktivität beim Abkühlen von 300 auf 3,8° K praktisch konstant bleibt:

$$\varrho_{2,8} = \varrho_{300} \cdot \frac{\tau_{2(300)}}{\tau_{2(3,8)}} = 9,8 \cdot 10^{-10} \Omega \text{m.}$$

Die beiden Oszillogramme (Abb. 5a und b) sind mit der gleichen Zeitablenkung von 10 ms/Einheit aufgenommen. Abb. 5a stellt das Abklingen der induzierten Spannung dar, wenn der Hohlzylinder vollständig normalleitend ist (Temperatur 3,8° K). Die gemessene Zeitkonstante τ_2 beträgt 8,6 ms. In Abb. 5b ist das Oszillogramm der Meßspannung dargestellt bei einer Temperatur des Hohlzylinders von 3,56° K. Der primäre Spannungssprung U_1 dieser Messung beträgt $8U_{1c}$, wobei sich τ_2 mit 8,7 ms angeben läßt. Damit stimmen die beiden Zeitkonstanten bei unter-

d überkritischer Temperatur sehr gut miteinander überein, wie es nach den vorangehenden Überlegungen erwarten war. Bei kleineren primären Spannungssprüngen wird jedoch die Zeitkonstante τ_2 größer: B. bei $3U_{1c}$ mißt sie bereits 13 ms. Dieser Fehler in Übereinstimmung mit den Abweichungen bei statischen Messungen, treten doch auch dort die größten Fehler bei kleinen Feldwerten auf.

Bis dahin ist das Verhalten des Hohlzylinders für den einmaligen Schaltvorgang untersucht worden. Im Schluß soll noch kurz der Verlauf des Sekundärstromes und der Meßspannung beschrieben werden, wenn als Primärspannung eine Serie von Rechteckpulsen dient.

Bei Einschaltamplituden $U_1 < U_{1c}$ wird keine Spannung in der Meßspule induziert (Abb. 6a).

Bei mehrmaligem Ein- und Ausschalten mit gleichen primären Spannungssprüngen $U_{1c} < U_1 < 2U_{1c}$ tritt nur beim ersten Einschaltstoß eine Spannung meßbar (Abb. 6b). Das erstmal fällt der Hohlzylinderstrom i_2 exponentiell auf den Wert I_{2c} ab. Das Ausschalten hat eine gleiche, aber entgegengesetzte Flußänderung zur Folge; der Sekundärstrom wird aus diesem Grunde einen Sprung $-i_2$ ausführen. Nun fließt aber bereits ein Strom I_{2c} im Hohlzylinder, so daß als resultierender Strom noch $I_{2c} - i_2$ übrig bleibt, der infolge des supraleitenden Zustandes unbeschränkt weiterfließt. Beim Wiedereinschalten führt der Sekundärstrom einen Sprung $+i_2$ aus und damit hat der Hohlzylinder gerade wieder den kritischen Wert I_{2c} erreicht [13].

Ist der primäre Spannungssprung U_1 größer als U_{1c} , so verläuft die Spannung an den Klemmen der Meßspule nach Fig. 6c. Der erste Spannungssstoß hat die größte Amplitude zur Folge, während alle nachfolgenden gleich hoch sind, weil die Anfangsbedingungen für jeden weiteren Schaltvorgang die gleichen sind.

Zusammenfassung

Der von zirkularen Strömen durchflossene, supraleitende Hohlzylinder besitzt folgenden Zwischenzustand: bei überkritischem, axialem Feld im Hohlzylinderinnern existiert auf der Außenseite desselben eine dünne Schicht, in der unabhängig vom Feld im

Innern der kritische Strom I_c fließt. Der Anteil des normalleitenden Materials im Zwischenzustand ist proportional dem Strom im übrigen Material, da der Potentialabfall im Zwischenzustandsmaterial sowie im normalleitenden Material die gleiche Größe haben muß. Auf Grund dieser Zwischenzustandsanordnung wird der Verlauf der Widerstandsübergangskurve R/R_n berechnet. Messungen an einer Indiumflachbandspule zeigen, daß bei Temperaturen unter $3,2^\circ\text{K}$ der gemessene Verlauf mit dem berechneten gut übereinstimmt, während in der Nähe des Sprungpunktes verhältnismäßig große Abweichungen auftreten. Dynamische Untersuchungen an einem Zinnhohlzylinder bestätigen im wesentlichen den berechneten Widerstandsverlauf, doch auch hier treten die größten Abweichungen bei kleinen Stromamplituden auf.

Herrn Professor Dr. P. GRASSMANN, Vorstand des Institutes für Kalorische Apparate und Kältetechnik, sei für sein Interesse, das er dieser Arbeit entgegenbrachte, bestens gedankt. Dem Leiter des Heliumlaboratoriums der ETH, Herrn PD. Dr. J. L. OLSEN, möchte ich meinen besonderen Dank aussprechen, hat er doch durch viele fruchtbare Diskussionen die vorliegende Arbeit wesentlich unterstützt.

Die Untersuchungen wurden durch einen Kredit aus dem Arbeitsbeschaffungsfonds des Bundes finanziell ermöglicht.

Literatur: [1] BUCK, D. A.: Proc. Inst. Radio Engrs. **44**, 482 (1956). — [2] OLSEN, J. L.: Z. angew. Math. Phys. **9a**, 293 (1958). — [3] GYGAX, S.: Helv. phys. Acta **31**, 287 (1958). — [4] MEISSNER, W., u. F. HEIDENREICH: Phys. Z. **37**, 449 (1936). — [5] LONDON, F.: Une conception nouvelle de la Supraconductibilité. Paris: Hermann & Cie. 1937. — [6] HAAS, W. DE, J. VOOGD and J. JONKER: Physica **1**, 281; Commun. Phys. Lab. Univ. Leiden. — [7] SILSBEE, F. B.: J. Wash. Acad. Sci. **6**, 597 (1916). — Bull. Bur. Stand. **14**, 301 (1918). — [8] RINDERER, L.: Helv. phys. Acta **29**, 339 (1956). — [9] MEISSNER, H., and R. ZDANIS: Phys. Rev. **113**, 1435 (1959). — [10] NABAUER, M.: Z. Phys. **152**, 328 (1958). — Superconductivity Conference, Royal Society Mond Laboratory, Cambridge, 1958. — [11] OLSEN, J. L.: Persönliche Mitteilung. — [12] KARAGOUNIS, A.: Supplement au Bull. de l'inst. Internat. du Froid, Annex 2, 195 (1956). — [13] GRASSMANN, P.: Phys. Z. **37**, 572 (1936), Abb. 3b, und Phys. Z. **38**, 430 (1937), Abb. 1.

Dipl.-Ing. FRITZ VON BALLMOOS,
Institut für Kalorische Apparate und Kältetechnik
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

Stoßfreie Plasmaaufheizung

Von FRITZ SCHNEIDER

Mit 1 Textabbildung

(Eingegangen am 10. Juli 1959)

Die Aufheizung eines Plasmas auf Fusionstemperatur ist mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden. Die Verluste, hauptsächlich Strahlungsverluste, steigen mit wachsender Temperatur; hingegen wird die Heizleistung die man dem Plasma zuführt, mit Hilfe von Mechanismen, die auf Stöße der Plasmapartner untereinander angewiesen sind, immer kleiner.

Es ist relativ einfach einem Plasma große Energiebeträge zuzuführen. Aber schon bei Temperaturen, die wesentlich unter der Fusionstemperatur liegen, wird diese Energie hauptsächlich zur Vermehrung der

kinetischen Energie der Elektronen oder Ionen verwendet, wie z.B. durch induktive oder Erregung auf der Ionencyclotronfrequenz. Erst durch Stöße der Partikel untereinander transformiert sich die kinetische in thermische Energie und erst dann hat man große Relativgeschwindigkeiten zwischen den Partikeln auf die es zum Zustandekommen einer Kernreaktion allein ankommt. Da aber der Wirkungsquerschnitt für zerstreue Stöße umgekehrt proportional mit T^2 geht, wird die übertragene Heizleistung mit steigender Temperatur kleiner.

1b

Der einzige, einfache Mechanismus, der ohne Stöße der Plasmapartner untereinander und damit direkt zu einer Vergrößerung der Relativgeschwindigkeit führt, ist eine einmalige Kompression eines „confined“-Plasmas. Wollte man aber ein Plasma von niedriger Temperatur durch eine einmalige Kompression auf Fusionstemperatur bringen, so müßte man riesige Magnetfeldenergiebeträge in den durch die Kompression freiverdenden Raum stecken und das Reaktionsvolumen wäre unwirtschaftlich klein.

Neben der einmaligen Kompression sind Arbeiten bekannt geworden, die die Plasmaaufheizung ohne Stöße zum Ziele haben. BUDKERS [1] Vorschlag (Adiabatische Kompression, Gay-Lussacsche Expansion) scheidet, will man Fusionstemperatur erreichen, nach dem heutigen Stand der Technik aus. In der Arbeit von BERGER [2] wird der thermische Energiegewinn einer Partikelverteilung beim einmaligen Durchgang durch einen zeitlich veränderlichen Potentialtopf behandelt; der n -malige Durchgang wurde nicht betrachtet. Die Behandlung der Bewegung eines Teilchens in einem zeitlich periodisch veränderlichen Potentialtopf hat gezeigt, daß man den Teilchen nicht ständig „thermische Energie“ zuführen kann. Auch gegen die „fine scale mixing“-Methode von BERGER [2] und STIX [3] bei der die kinetische Energie einer Welle durch Laufzeiteffekte in thermische übergeht, kann man Bedenken äußern, wenn man die überraschenden Ergebnisse von ULAM [4] mit in Betracht zieht (eine Saite, bei der die Rückstellkraft eine kleine nichtlineare Komponente hat und die mit einer sinusförmigen Auslenkung startet, koppelt zunächst Energie in höhere Harmonische. Nach einer gewissen Schwingzeit ist die Energie aber wieder im wesentlichen in die der Frequenz der „Grundschwingung“ zurückgekehrt.)

In folgender Abhandlung soll nun ein quasiperiodischer Mechanismus betrachtet werden, der ohne Stöße der Partikel untereinander dem Plasma direkt und ständig thermische Energie zuführt.

Vorausgesetzt wird ein Mechanismus, der es gestattet eine Geschwindigkeitskomponente v_0 eines Teilchens um $\pm 2w$ zu ändern. Die Wahrscheinlichkeiten für $+$ und $-$ seien gleich; w sei viel kleiner als v_0 und die Zeit zwischen zwei Ereignissen τ_0 ist, wie spätere praktische Beispiele zeigen, eine Funktion von v_0 . Nach einer gewissen Zeit τ haben alle Teilchen in einer Gruppe mit der Anfangsgeschwindigkeit v_{0i} ungefähr gleich viele Stöße $l = \tau/\tau_0$ gemacht und die Gruppe wurde in $2l$ Untergruppen mit verschiedenen Geschwindigkeiten aufgespalten.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Teilchen mit der Anfangsgeschwindigkeit v_{0i} nach l Stößen eine neue Geschwindigkeit v_i hat, ist:

$$I, \quad W(v_i) = \binom{i}{l-i} \left(\frac{1}{2}\right)^l \quad \text{mit} \quad v_i = v_{0i} + 2iw \\ -l \leq i \leq l \\ i \text{ ganzzahlig}$$

Zu Beginn des Prozesses soll eine Geschwindigkeitsverteilung $\varrho(v_{0i})$ symmetrisch zum 0-Punkt existiert haben.

Die Gesamtenergie der Teilchen vor dem Prozeß ergibt sich zu:

$$E_u = m \int_0^\infty \varrho(v_{0i}) v_{0i}^2 dv_{0i} \\ m \text{ Masse eines Teilchens}$$

und nach dem Prozeß:

$$E_n = m \int_0^\infty \varrho(v_{0i}) dv_{0i} \cdot \sum_{-l}^{+l} W(v_i) \cdot v_i^2 \\ \sum_{-l}^{+l} W(v_i) v_i^2 = \sigma^2 + \mu^2 \\ \mu \text{ Mittelwert} \\ \sigma^2 \text{ mittlere quadratische Abweichung}$$

Aus I ergibt sich:

$$\mu = v_{0i}, \\ \sigma^2 = 4w^2 l.$$

Für die Stoßzahl l nach einer Zeit Δt :

$$l = \frac{\Delta t}{\tau_{0i}(v_{0i})}.$$

In praktischen Beispielen kann man τ_{0i} meist wie folgt schreiben:

$$\tau_{0i} = \frac{d}{v_{0i}},$$

wobei d irgend eine charakteristische Apparatlänge ist, und damit:

$$E_n = E_u + m N \frac{2w^2 \bar{v}_0}{d} \Delta t$$

N Anzahl der Teilchen
 \bar{v}_0 mittlere Teilchengeschwindigkeit

Endlich nun die zugeführte Heizleistung:

$$L = \frac{E_n - E_u}{\Delta t} = 2N m \frac{w^2 \bar{v}_0}{d}.$$

Im Gegensatz zu einer Heizmethode, die auf Partikelstöße angewiesen ist, nimmt hier die zugeführte Heizleistung mit größerer Partikelgeschwindigkeit zu.

(Bei der allgemeinen Behandlung des Problems, d.h. Geschwindigkeitsverteilung als Funktion der Zeit mit einer gegebenen Verteilung zur Zeit t_0 stößt man auf nicht trivial lösbare Schwierigkeiten.)

Als Beispiel betrachten wir ein Gas, eingeschlossen zwischen zwei parallelen Wänden vom mittleren Abstand d , die sich mit der Geschwindigkeit $\pm w$ bewegen können. Die mittlere Zeit zwischen zwei Geschwindigkeitsumkehrungen sei kleiner als die mittlere Zeit τ_0 , die ein Partikel benötigt, um von einer Wand zur anderen zu gelangen. Außerdem soll die Wandamplitude δ klein sein gegen den mittleren Wandabstand und die Anfangsgeschwindigkeit eines Partikels $|v| \gg |w|$. Ist die Wandfrequenz ν mit einer Bandbreite $\nu_0 = 1/\tau_0$ verwechselt, dann ist die Wahrscheinlichkeit, daß beim Wandstoß v und w die gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben, gleich groß.

Zur Berechnung der Wandgeschwindigkeit setzen wir ein genügend gut leitendes Plasma voraus, so daß das, die Wand repräsentierende Magnetfeld nicht weit in das Plasma eindringen kann. Ein Partikel, aus dem feldfreien Plasma kommend, wird im Magnetfeld der Übergangszone in entgegengesetzte Richtung abgelenkt. Die „Reflektionszeit“ liegt in der Größenordnung der Gyrationzeit des Partikels im äußeren Magnetfeld und soll klein sein gegen die mittlere reziproke Wandfrequenz. Außerdem sollen obige Voraussetzungen auch hier gültig sein. Die Kräfte, die dann an der Wand miteinander im Gleichgewicht stehen müssen, beschränken sich im wesentlichen auf den Druck des Magnetfeldes und die Impulsänderung der Partikel an der Wand.

Für ein zeitlich konstantes Magnetfeld befindet sich die Wand in Ruhe und man hat Gleichgewicht für:

$$\frac{B_0^2}{2\mu_0} = n m \bar{v}^2$$

n Partikeldichte
 μ_0 Permeabilitätskonstante

Wird durch Veränderung von B_0 das Gleichgewicht gestört, so kann es nur durch eine sich bewegendes Wand wiederhergestellt werden:

$$\frac{(B_0 \pm \Delta B)^2}{2\mu_0} = 2m \int_0^\infty (v \pm w)^2 W(v) dv$$

$W(v)$ Wahrscheinlichkeitsdichte der Geschwindigkeit

$$\Delta B \ll B_0 \quad w = \frac{\bar{v}^2}{v} \cdot \frac{\Delta B}{B_0}$$

ist eine Maxwellverteilung:

$$w \approx v \frac{\Delta B}{B_0}$$

Will man den Partikeln pro Wandstoß eine Energie der Größenordnung 1 eV mitteilen, so muß für Elektronen $w \approx 10^6$ cm/sec sein. Das bedeutet bei Plasmatemperatur $\Delta B/B \approx 10^{-2}$.

Die Amplitude ΔB des Wechselfeldes muß daher beträchtliche Werte annehmen; die nur wiederum mit leistungsstarken Oszillatoren erzielt werden können. Da außerdem eine beträchtliche Rauschbreite vorhanden sein muß, scheint die übliche Technik (Breitbandröhrenverstärker) mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden zu sein.

Eine Anordnung, die mit gedämpften Oszillatoren arbeitet, bietet eine einfachere technische Lösung.

Nach der Abbildung ist eine Plasmasäule in einem statischen Magnetfeld eingeschlossen. Die Enden der Säule seien durch „Bottle-Geometrie“ abgedichtet. Längs der Säule habe man eine Anzahl von Oszillatoren angeordnet, die aus einer, um das Entladungsfäß gewickelten Spule, einem Kondensator und einem Schalter bestehen. Hochohmig werden die Kondensatoren von einer Hochspannungsquelle geladen. Schließt man den Schalter, so schwingt der Kreis gedämpft aus. (Erzielte Kreisdaten mit Papierkondensatoren: 1 MHz; Schwingzeit 10 μ sec; Scheinleistung $\approx 10^9$ W; Bei Verwendung von Keramik-kondensatoren lassen sich natürlich bessere Kreisdaten erzielen.)

Die Partikel der Säule sollen einige Male die Zone passieren in der das Hochfrequenzfeld wirksam ist, d.h. einige Wandstöße erfahren¹. Nach dem Ab-

¹ In einem Modell, bei dem die Wand periodisch mit der Geschwindigkeit $\pm w$ schwingt, spaltet eine Gruppe von Teilchen einheitlicher Geschwindigkeit in mehrere Untergruppen auf mit einem Geschwindigkeitsabstand $2w$. Da eine Art „Phasen-Fokussierung“ auftritt, bleibt die Gruppenzahl aber endlich. Durchgeführte Beispiele haben gezeigt, daß man nach einigen (5 bis 10) Perioden die maximale Aufspaltung erzielt hat.

klingen der Oszillation schließt man den Schalter des zweiten Kreises usw. Die Zeitintervalle zwischen 2 Schließungen werden durch ein statistisches Element bestimmt. (Methode von KELLER [5] zum Betrieb des „stochastischen Cyclotrons“ oder durch kritische Einstellung der Funkschalter). Nach der Entladung des letzten Schwingkreises sei der erste Kondensator wieder aufgeladen und der Cyclus kann sich wiederholen.

In der Stellaratorgeometrie läßt sich die gleiche Anordnung treffen. Wegen des inneren Magnetfeldes wird aber im Gegensatz zum ersten Beispiel die „radiale Temperatur“ wenig beeinflusst, hingegen wird

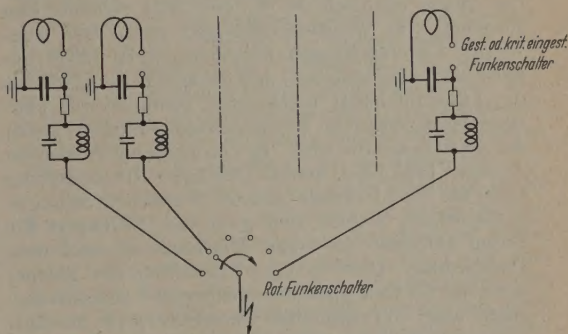


Abb. 1 Schaltskizze des Heizkreises

die Energie hauptsächlich in die axiale Komponente wandern (bedingt durch das zeitlich veränderliche innere B -Feld).

Zusammenfassung

Bei Vernachlässigung der Stöße der Plasmapartner untereinander kann man Bedenken äußern gegen die ständige „thermische“ Energiezufuhr mit Hilfe periodisch arbeitender Mechanismen. Es wird ein quasi-periodischer Heizmechanismus betrachtet, der einen ständigen „thermischen“ Energiegewinn garantiert.

Den Herren GEIGER, KELLER und VOSICKI danke ich für wertvolle Diskussionsbeiträge. Meinen besonderen Dank möchte ich Herrn A. SCHOCH sagen.

Literatur: [1] BUDKER, G.I.: Fizika Plazmy, vol. III, publ. Academy of Science USSR 1958. — [2] BERGER, J.M.: Peaceful Uses of Atomic Energy, Vol. 31, p. 112, publ. U.N. 1958. — [3] STIX, T.H.: Peaceful Uses of Atomic Energy, Vol. 31, p. 125, publ. U.N. 1958. — [4] ULAM, S.: Series of lectures on physics of ionized Gases, Part IB, p. 11, publ. Los Alamos Scientific Laboratory. — [5] KELLER, R., and K.H. SCHMITTER: Beam storage with stochastic acceleration and improvement of S.C. beam. CERN 58—13.

Dr. FRITZ SCHNEIDER,
CERN European Organization for Nuclear Research
Genf

Temperaturbestimmungen in Funkenentladungen mit Hilfe zeitlich aufgelöster Spektren *

Von HELMUT SPÄTH und HANS KREMPL

Mit 5 Textabbildungen

(Eingegangen am 11. August 1959)

1. Einleitung

Schon seit längerer Zeit gilt es als sicher, daß im Gleichstrombogen Temperaturgleichgewicht mit Maxwell-Verteilung von Elektronen und Ionen herrscht und daß die Temperatur der Elektronen mit derjenigen der Atome identisch ist [4], [5]. Für veränderliche Plasmen, z. B. Wechselstrombögen, waren erst langwierige Untersuchungen notwendig (z. B. [23]), um auch hier sicherzustellen, daß die spektroskopisch aus der Linienintensität bestimmten Temperaturen (Anregungstemperaturen, Ionisationstemperaturen) gleich der Gastemperatur sind. In den neuesten russischen Arbeiten [36], [36a] konnte Gleichgewichtseinstellung auch für kurzdauernde „harte“ Funkenentladungen nachgewiesen werden und zwar mit Sicherheit für Zeiten innerhalb der ersten Mikrosekunde nach dem Durchschlag. Diese geringe Einstellzeit der Temperatur war für viele Spektroskopiker eine Überraschung, zumal auch von namhaften Theoretikern [4] die Auffassung vertreten wurde, daß (je nach Atomgewicht) die Gastemperatur eine Verschiebung bis zu 10^{-5} sec gegenüber der Elektronentemperatur besitzt. Außerdem wurde durch die angeführten Arbeiten auch bewiesen (was bisher ebenfalls häufig bezweifelt worden war), daß die Temperatur des Funkenplasmas von entscheidender Bedeutung für den spektralen Charakter der Entladung ist.

Der Fortschritt der neueren Untersuchung der Temperatur von Funkenplasmen besteht darin, daß zur Auswertung Ionenlinien herangezogen wurden, die wesentlich höhere Temperaturen indizieren, als die früher [16], [21] benutzten Atomlinien. Mit diesen kann man nämlich nur die Temperatur der relativ kühlen Außenschichten des Funkenkanals bestimmen, während in dem heißen Zentrum praktisch alle Atome ionisiert sind. Die Verwendung von Ionenlinien zur Temperaturbestimmung stößt aber insofern auf Schwierigkeiten, als für diese (im Gegensatz zu vielen Atomlinien) meist keine Oszillatorenstärken bekannt sind, so daß die Anwendung der Zweiliniemethode [23] nicht möglich ist.

Im folgenden soll daher über eine Methode berichtet werden, die es ermöglicht — in Anlehnung an astrophysikalische Methoden (FOWLER und MILNE 1923) zur Bestimmung der Sternentemperatur, von LARENZ [29] auf die Bestimmung des radialen Temperaturverlaufs in Hochstrombögen abgeändert —, die spektroskopische Temperaturskala kontinuierlich bis 50000° K und darüber zu erweitern, um damit in die Vorgänge des Plasmakernes von Funkenentladungen vorzudringen.

2. Meßanordnung

2.1. Optik

Der Funken wurde über eine Zwischenabbildung in dem Kollimatorspiegel eines Monochromators (M 4 Q, Zeiß)

abgebildet. Die Brennweiten der Linsen wurden so gewählt, daß das Funkenbild etwa halb so groß war wie der Kollimatorspiegel, um Vignettierungen beim „Tanzen“ des Funkens zu vermeiden. Aus demselben Grunde wurde der Austrittsspalt scharf auf die Photokathode eines Sekundärelektronenvervielfachers (RCA 1 P 21) abgebildet. Mit diesen beiden Maßnahmen konnten Intensitätsveränderungen infolge seitlichen Auswandern der Lichtquelle (geprüft mit einer Punktlichtlampe) um den Faktor 5 vermindert werden.

2.2. Elektronik

Das elektrische Signal des Vervielfachers wurde mit einem Tektronix-Oszillographen (Type 455, Auflösung besser als $0,1 \mu\text{sec}$) zeitlich aufgelöst und das Intensitäts-Zeitdiagramm der Bildröhre mit Röntgenbildschirmfilm (Perutz 21/10 DIN, γ -Wert 1,9) aufgenommen. Bei einer Öffnung von 1:3,5 der Kamera (Agfa-Carat) genügt für die Belichtung ein einziger Funkendurchschlag bei einer Zeitbasis von $5 \mu\text{sec}$.

2.3. Funkenerzeuger

Der Entladekreis bestand aus $C = 0,1 \mu\text{F}$, $L = 4,24 \mu\text{H}$, ($f = 250 \text{ kHz}$), $R = 0 \Omega$. Der Kondensator wurde über einen geeigneten Ladewiderstand auf 10 kV aufgeladen. Der Analysenfunkentrecke war eine Schaltfunkentrecke mit Zündstift vorgeschaltet, auf den ein Impuls gegeben wurde, sobald die Kondensatorspannung einen bestimmten Wert erreicht hatte. Mit Hilfe dieser Schaltelektronik [44] konnte die Entladespannung auf besser als 1% konstant gehalten werden. Der Spitzenstrom berechnet sich bei den angegebenen Daten auf 1540 A. Die Funkentrecke befand sich in einer Glocke ($\varnothing = 20 \text{ cm}$), die evakuiert und mit verschiedenen Gasen gefüllt werden konnte.

3. Vorgänge im Funken und mögliche Verfahren zur Temperaturmessung

Bei einer Kondensatorentladung bricht nach dem Durchschlag an der Funkenstrecke die Spannung innerhalb eines Bruchteils einer Mikrosekunde zusammen, worauf der Funke wie ein hochfrequenter Wechselstrombogen mit einer Brennspannung von 45 bis 60 V (je nach Elektrodenmaterial) weiterbrennt: Der Funkenstrom oszilliert in einer gedämpften Sinusschwingung, die bei überwiegend ohmschem Kreiswiderstand exponentiell, bei reiner Funkendämpfung linear abfällt [10], [30], [38]. Für den spektralen Charakter der Entladung ist in erster Linie der Spitzenstrom ($i_0 = U \sqrt{C/L}$), und zum Teil auch der Differentialquotient des Stromes maßgebend.

Die vom Kondensator in das Plasma eingespeiste Energie heizt das Gas auf und erweitert den Entladungskanal, ein Vorgang, der nach MANDELSTAM und dessen Schule durch hydrodynamische Gleichungen beschrieben werden kann [7].

Der Hauptprozeß, der zur Anregung und Ionisation der Atome führt, sind Elektronenstöße [4], [8], [11]. Die Rückkehr der angeregten Elektronen erfolgt bei Atomen überwiegend (99%) durch Stöße zweiter Art, bei Ionen durch Dreierstoß (90%). Prozesse, bei denen angeregte Atome ihre gesamte Energie durch Strahlung bzw. bei Ionen durch Zweierstoß und Strahlung verlieren, sind sehr selten und kommen für Energiebetrachtungen nicht in Frage.

* Auszug aus der Dissertation H. SPÄTH, Physikalisch-Chemisches Institut TH München 1958 mit Erweiterungen.

Die neueren Arbeiten über veränderliche Plasmen meinen im Gegensatz zu früheren zu bestätigen [16], [6], [36a], daß die Gasteilchen sich in praktisch meßbarer Zeit ($< 10^{-7}$ sec) auf die Elektronentemperatur eingestellt haben; man kann somit die in der Spektralanalyse verwendeten Funken als quasistationär betrachten, bei denen alle Plasmateilchen eine Maxwellverteilung besitzen, die wiederum eine bestimmte Temperatur definiert. Die Gastemperatur ändert sich beim Auf- und Abbau des Plasmas im Verlauf der Entladung. Da thermisches Gleichgewicht herrscht, wird sie durch den zeitlichen Verlauf der Intensität von Spektrallinien indiziert. Bei „harten“ Entladungen wird sich bereits nach kurzer Zeit eine sehr hohe Temperatur eingestellt haben, die hauptsächlich durch Wärmeableitung, mechanischer Energie (Stoßwelle, Expansion) und Diffusion abklingt. Der Entladungskanal befindet sich nicht auf homogener Temperatur, sondern diese zeigt einen radialen Abfall, wodurch der Entladungskanal in verschiedenen heißen Hüllen zerfällt. Jede Hülle für sich erzeugt daher ein eigenes Spektrum, in der Kernnähe ein mehr funkenähnliches und in den Außenhüllen ein mehr bogenähnliches.

Zur Bestimmung der Gastemperatur im Funkenplasma bieten sich naturgemäß nur solche Methoden, die eine Beobachtung der schnell veränderlichen Meßgrößen ermöglichen. Viele für Temperaturbestimmungen an stationären Lichtbögen benutzte Verfahren scheiden damit aus. Bis jetzt wurden zur zeitlichen Auflösung der Vorgänge entweder Drehspiegelanordnungen oder Photomultiplier mit nachfolgenden Oszillographen verwendet, wobei mit letzteren wesentlich genauere Beobachtungen gemacht werden können (Auflösung 10^{-7} sec gegenüber $5 \cdot 10^{-7}$ sec beim Drehspiegel). Das Gas wurde dabei entweder interferometrisch gemessen (Bestimmung der Teilchendichte n im Plasma und daraus T) oder aus der Linienintensität bei gleichzeitiger photographischer Bestimmung des Kanalradius der Ionisationsgrad des Füllgases (z. B. H) ermittelt, wobei man über die Saha-Gleichung die Temperatur erhält [22], [32]; andere Autoren vergleichen das Intensitätsverhältnis zweier Linien der gleichen Ionisationsstufe (Ornsteinsche Zweiliniemethode [14], [16], [21]). Da von den bisherigen Methoden nur diese ohne Drehspiegel auskommt, soll sie näher besprochen werden, um sie mit dem neuen Verfahren besser vergleichen zu können. Nach ORNSTEIN [23] gilt für das Intensitätsverhältnis $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ zweier Linien der Wellenlängen λ_1, λ_2 ein und desselben Ionisierungsgrades mit den statistischen Gewichten g_1 und g_2 , den Oszillatorenstärken f_1, f_2 und den Anregungsspannungen U_{a1} und U_{a2} die Temperaturabhängigkeit

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{g_1 \cdot f_1}{g_2 \cdot f_2} \cdot \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^3 e^{-\frac{U_{a1} - U_{a2}}{kT}} \quad (1)$$

Mißt man das Intensitätsverhältnis $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ in Abhängigkeit von der Zeit, so kann man daraus den zeitlichen Temperaturverlauf $T(t)$ berechnen, vorausgesetzt, daß man die Oszillatorenstärken f_1, f_2 kennt. Diese sind zwar für viele Atomlinien, aber nur für wenige Ionenlinien bekannt (Si IV-Linien, N III-Linien [36a], C II-Linien [19]). Bei Verwendung von Atomlinien beschränkt sich die Anwendung der Zweiliniemethode auf verhältnismäßige niedrige Temperaturen ($< 10000^\circ \text{K}$), da

a) nach HULDT [6] wegen des radialen Temperaturabfalls vom „heißen“ Plasmakern zur „kalten“ Außentemperatur immer nur die Temperatur derjenigen Kernhülle angezeigt („indiziert“) wird, wo die Linie optimal angeregt wird, bei Atomlinien also die Temperatur der kälteren Außenzonen und keinesfalls die Maximaltemperatur im Plasmazentrum.

b) Wie aus (1) leicht abzuleiten, steigt der relative Fehler der Temperaturmessung proportional der Temperatur.

Ein Vorteil der Zweiliniemethode ist der, daß die Teilchendichte des Emissionsträgers, wie diese später in Gl. (13) auftritt, durch die Verhältnisbildung herausgefallen ist. Damit entfällt aber ein Kriterium, ob die Gastemperatur des Plasmas gleich der Elektronentemperatur ist. Die Gl. (1) fordert nämlich nur Maxwell-Verteilung der Elektronen, die auch in schnell veränderlichen Plasma vorhanden ist [4]. Man mißt also mit der Zweiliniemethode die Elektronentemperatur, die Gastemperatur kann in veränderlichen Plasmen zeitlich hinterherlaufen (s. Absatz 6.1).

Bei dem hier angewandten neuen Verfahren ist die Kenntnis der Oszillatorenstärke nicht nötig, dagegen muß die relative Teilchendichte der einzelnen Ionenarten berechnet werden (Abschnitt 4.2 und 4.3), eine Rechnung, die an Hand bekannter Ausgangsgleichungen, z. B. nach [29], mit endlichen Aufwand nur unter gewissen Vernachlässigungen durchgeführt werden kann. Um diese abzuschätzen und der Vollständigkeit halber sollen in 4.1 kurz die thermodynamischen Gesetze im Plasma und die Anregung diskutiert werden.

4. Anregung der Spektren und Berechnung der Temperaturskala

4.1. Allgemeines

Wie in der Spektroskopie üblich, sollen im folgenden die neutralen Atome mit A I (A = chemisches Symbol), ihre Teilchendichte (Anzahl der Teilchen A/cm³ = Konzentration) mit n_0 , die Ionen mit der Ionisationsstufe (= Anzahl der abgelösten Elektronen) $i=1, 2, 3 \dots$ mit A II, A III, A IV, ihre Teilchendichte mit n_1, n_2, n_3 usw. bezeichnet werden. Der Index i ist also jeweils um 1 kleiner als die Beizahl I, II, III, Bei Betrachtung von Linien wird hinter das Symbol des Emissionsträgers A I, A II ... die Wellenlänge der emittierten Linie gesetzt.

In einem heißen Plasma hat man als leuchtende Teilchen neben den Atomen auch Ionen verschiedener Ionisationsstufen i (Ladung). Da die Intensität einer Spektrallinie der Teilchendichte des Strahlungsträgers proportional ist, besteht die Hauptarbeit bei der Bestimmung von Linienintensitäten in der Berechnung der verschiedenen Teilchendichten; die Intensität ergibt sich sofort durch Multiplikation mit dem Boltzmann-Faktor. Beim Durchlaufen der Temperaturskala (Abb. 1) von tiefen Temperaturen aus, werden die Atome ($i=0$) in steigendem Maße zuerst einfach ionisiert ($i=1$), man hat dann nebeneinander die Teilchen A I und A II. In dem Maße, in dem die Teilchendichte n_1 der Ionen A II ansteigt, werden auch die neutralen Atome A I angeregt, da die Energie zur Anregung eines Leuchtelektrons geringer ist, als die zur Abtrennung. Bei weiterer Erhitzung verarmen die Neutralteilchen A I zugunsten von A II, die Emission von A I übersteigt ein Maximum und sinkt dann wieder ab, während n_1 noch wächst, bis die thermische Energie des Plasmas ausreichend ist, um die

Ionen A II um eine weitere Stufe zu ionisieren. Wäre die Ionisierungsspannung des neutralen Atoms U_{j0} in etwa gleich der Energie U_{j1} , die zur Ablösung des zweiten Elektrons nötig ist, dann würden beide Ionisierungsvorgänge bei etwa der gleichen Temperatur stattfinden. Bei Durchsicht der Ionisierungsspannungen eines Elements (siehe z. B. [5a]) erkennt man, daß diese im allgemeinen mit einer geometrischen Reihe steigen. So findet man, daß bei sehr vielen Elementen, insbesondere bei den hier betrachteten, die Ionisierungsspannung von A II ungefähr doppelt groß ist, als die von A I usw. Man kann also schreiben

$$U_{ji+1} = \text{Größenordnung } 2 \cdot U_{ji}. \quad (2)$$

Ist das Teilchen soweit ionisiert, daß die Elektronenschale Edelgascharakter besitzt, so ist der Sprung von

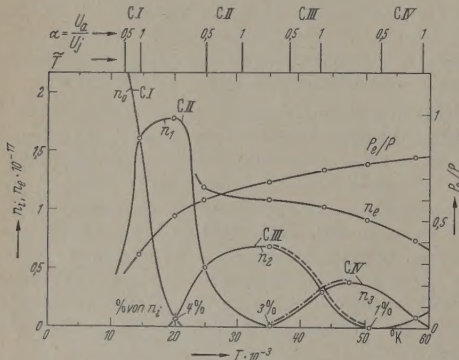


Abb. 1. Teilchendichte n_i , Elektronendichte n_e , Elektronendruck/Gesamtdruck P_e/P und Normtemperatur \bar{T} in Abhängigkeit von der Temperatur bei Kohlenstoff. $P=1$ atm. Halbschematisch: Die mit o bezeichneten Punkte sind berechnet. (Vereinfachtes Rechenschema nach H. KREMPL, erscheint demnächst)

U_{ji} auf U_{ji+1} noch erheblich größer, z. B. ist bei dreifach ionisierten C IV-Atomen $U_j=64,5$ beim Helium-ähnlichen C V-Atom dagegen das sechsfache, nämlich 392,0 eV. Dieses Ansteigen der Ionisationsspannung bewirkt, daß in einem Plasma bei jeder Temperatur im wesentlichen nur zwei, höchstens drei (im Maximum von n_i) Ionisationsstufen nebeneinander existieren (Abb. 1). Dies ergibt sich einfach aus folgender Überlegung: Ist zur Ionisierung eines bestimmten Anteils von Teilchen mit der Ionisierungsspannung U_{ji} eine mittlere kinetische Energie $\frac{3}{2}kT$ der Teilchen nötig, so wird für dieselbe Anzahl mit der nächst höheren Ionisationsspannung U_{ji+1} nach Gl. (2) die doppelte kinetische Energie $\frac{3}{2}k2T$, d. h. die doppelte Temperatur nötig sein¹. Das heißt, daß die verschiedenen Träger der Emission nacheinander in der Temperaturskala erscheinen und sich jeweils im wesentlichen nur zwei Arten mit aufeinanderfolgenden Ionisierungsstufen überlappen. Diese Voraussetzung muß im folgenden gemacht werden, da sonst die Berechnung der Teilchenzahl sehr kompliziert wird (siehe z. B. [29]). Man sieht in Abb. 1, wo das Beispiel des Kohlenstoffes an den wesentlichen Punkten (Maxima, Überschneidungspunkte) durchgerechnet wurde, daß nur im

¹ Genau betrachtet, müßte man die Saha-Funktion Gl. (5) (Abb. 2) diskutieren, da das Verhältnis eU_j/kT nur in der e -Funktion steht. Dieser gegenüber besitzt der Faktor $(kT)^{\frac{3}{2}}$ eine schwache Abhängigkeit von T , so daß sich in der Betrachtungsweise nichts Wesentliches ändert.

Maximum von n_i einige Prozente sowohl von n_0 als auch von n_2 vorhanden sind. Man sieht aber auch, daß die Linien der verschiedenen Emissionsträger nicht im Maximum der Trägendichte, sondern erst bei höheren Temperaturen optimal angeregt werden (Abb. 1, obere Reihe). Die Verschiebung zu höheren Temperaturen ist um so größer, je größer das Verhältnis α von Anregungsenergie zu Ionisationsenergie ist. Wir können also bei den Temperaturen in der Nähe des Liniennormals — im folgenden nach LARENZ [29] Normtemperatur genannt — ohne große Fehler mit nur zwei Teilchenarten n_i und n_{i+1} rechnen.

4.2. Teilchendichte im Einkomponentensystem

Im Plasmaraum befinde sich nur ein Element, nämlich das der umgebenden Atmosphäre, im folgenden kurz Füllgas genannt. Die Teilchen des verdampften Elektrodenmaterials (Elektrodenndampf) sollen erst in Abschnitt 4.3. berücksichtigt werden. Dann befinden sich in 1 cm^3 Plasma n_i Ionen der Ionisationsstufe i und n_{i+1} der Stufe $i+1$. Die Anzahl der Elektronen, die von diesen Teilchen abgelöst wurden ist gleich der Ladung (Ionisationsstufe) der Teilchen mal der Teilchenzahl selbst, also $i \cdot n_i + (i+1) \cdot n_{i+1}$. Alle diese Teilchen tragen in gleichem Maße zum Gesamtdruck bei, so daß sich die Allgemeine Gasgleichung schreibt:

$$P = [(i+1) \cdot n_i + (i+2) \cdot n_{i+1}] kT \quad i=0, 1, \dots \quad (3)$$

Entsprechendes gilt für den Elektronenpartialdruck:

$$P_e = [i n_i + (i+1) n_{i+1}] kT. \quad (4)$$

Die Wechselwirkung Ionisation \leftrightarrow Rekombination wird durch das Massenwirkungsgesetz des Plasmas, durch die Saha-Funktion F_i beschrieben:

$$\frac{n_{i+1}}{n_i} \cdot P_e = F_i = 2 \frac{(2\pi m)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \cdot \frac{g_{i+1}}{g_i} \cdot (kT)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{eU_j}{kT}}. \quad (5)$$

g_i und g_{i+1} = statistische Gewichte der Grundzustände der Teilchen n_i und n_{i+1} . (Über die Verwendung der statistischen Gewichte an Stelle der exakteren Zustandssummen s. UNSÖLD [5a].)

Gl. (5) gilt streng für jede Temperatur, während (3) und (4) nur für ein kleines Temperaturintervall verwendet werden können, wo die in 4.1 gezeigten Vereinfachungen zulässig sind.

Wenn P gegeben ist, kann man aus diesen drei Gleichungen die drei Unbekannten n_i , n_{i+1} und P_e berechnen. Für den Linienverlauf interessiert nur n_i [Gl. (13)]. Man erhält durch elementare Rechnung:

$$n_i = \frac{P}{2kT} \cdot \frac{1}{i+1} \left[i^2 + 2i + 2 - (i+2)^2 \cdot f\left(\frac{F_i}{P}\right) \right]. \quad (6)$$

Dabei ist abgekürzt:

$$f\left(\frac{F_i}{P}\right) = \frac{F_i}{P} \times \left\{ \sqrt{1 + 2 \frac{i^2 + 2i + 2}{(i+2)^2} \frac{P}{F_i} + \left(\frac{i}{i+2}\right)^2 \frac{P^2}{F_i^2}} - 1 \right\}. \quad (7)$$

Bildet man die Grenzwerte für n_i , so sieht man, daß n_i , vom Wert $\frac{P}{kT} \cdot \frac{1}{i+1}$ bei niederen Temperaturen,

* Der Einfachheit halber wird hier und im folgenden bei U_j und U_0 der Index i weggelassen, insoweit die Beziehung auf den Träger eindeutig ist.

monoton gegen Null bei hohen Temperaturen sinkt; vgl. Abb. 1. Dort ist der Gültigkeitsbereich der Gl. (6) für den Fall $i=2$ durch eine gestrichelte Linie angedeutet. Für den ansteigenden Ast von n_{i+1} (strichpunktierte Linie in Abb. 1) erhält man entsprechend:

$$n_{i+1} = \frac{P}{2kT} \left[(i+2) \cdot f\left(\frac{F_i}{P}\right) - i \right]. \quad (8)$$

n_{i+1} steigt mit der Temperatur von Null monoton gegen den Wert $\frac{P}{kT} \frac{1}{i+2}$, wie man sich durch Grenzwertbildung überzeugen kann oder aus Gl. (3) sofort ablesen kann, wenn man n_i gleich Null setzt. Gl. (8) wird zur Berechnung von (11) benötigt.

4.3. Teilchendichte des Elektrodendampfes im Zweikomponentensystem

Die Teilchen des Elektrodennaterials, die an der Oberfläche der Elektroden verdampft werden, vermischen sich mit dem Füllgas zu einem Zweikomponentensystem und werden ebenfalls ionisiert. Es sei dabei

n bzw. m die Teilchendichten } des Füllgases
bzw. h als Index } bzw. des Elek-
die Ionisationsstufe } trodendampfes

F_i und F_h die entsprechenden Saha-Funktionen.

Wie beim Einkomponentensystem rechnen wir auch hier mit nur zwei Ionisationsstufen, die in dem entsprechenden beschränkten Temperaturintervall nebeneinander existieren sollen. Man hat also die vier Teilchenarten n_i , n_{i+1} des Füllgases und m_h , m_{h+1} des Elektrodennaterials. Die Teilchen höheren oder tieferen Ionisationsgrades seien vernachlässigbar. Dies ist nur dann erlaubt, wenn Füll- und Elektrodengas etwa die gleiche Ionisierungsspannung haben oder, anders ausgedrückt, bei gegebenem h ist i so zu wählen, daß dies der Fall ist. (Vgl. Abb. 4.)

Macht man die plausible Annahme, daß die Anzahl der verdampften Elektrodennatome klein ist gegenüber der des Füllgases, das ja schon vor Beginn der Entladung den Plasmaraum ausfüllt, also

$$m_h, m_{h+1} \ll n_i, n_{i+1}, \quad (9)$$

dann bleiben die drei Gln. (3), (4) und (5) für das Einkomponentensystem erhalten. Dazu kommt hier noch die Saha-Gleichung für den Elektrodendampf:

$$F_h = \frac{m_{h+1}}{m_h} \cdot P_e. \quad (10)$$

Als fünfte Bestimmungsgleichung für die fünf Unbekannten n_i , n_{i+1} , m_h , m_{h+1} und P_e muß ein Verhältnis v für die am Plasmaaufbau beteiligten Atome Elektrodengas:Füllgas vorgegeben werden. (Die Größe dieses Verhältnisses $v \ll 1$ ist bei der Bestimmung der relativen Linienintensität uninteressant, seine zeitliche Konstanz während des Funkenablaufes wird in Abschnitt 6.4 diskutiert.) Man erhält dann nach einigen Umformungen

$$m_h = v \frac{n_i + n_{i+1}}{\frac{F_h}{F_i} \cdot \frac{n_{i+1}}{n_i} + 1}, \quad (11)$$

$$m_{h+1} = v \frac{n_i + n_{i+1}}{\frac{F_h}{F_i} \cdot \frac{n_i}{n_{i+1}} + 1}. \quad (12)$$

Für $F_h = F_i$ erhält man, wie zu erwarten, $m_h = v \cdot n_i$ und $m_{h+1} = v \cdot n_{i+1}$, d.h. die Dichten von Füll- und Elektrodengas unterscheiden sich nur um den Faktor des Verhältnisses der beteiligten Atome. Zur Auswertung dieser beiden Gleichungen sind die in Gl. (6) und (8) gefundenen Werte von n_i und n_{i+1} einzusetzen.

4.4. Numerische Berechnung der Linienintensitäten

Nachdem nun die Ionendichten n_i in Gl. (6) und m_h in Gl. (11) bestimmt sind, kann man sofort durch Multiplikation mit dem Boltzmann-Faktor den relativen Intensitätsverlauf berechnen:

Für das Füllgas gilt

$$\varepsilon \sim n_i e^{-\frac{U_a}{kT}}. \quad (13)$$

Für den Elektrodendampf gilt

$$\varepsilon \sim m_h e^{-\frac{U_a}{kT}}. \quad (14)$$

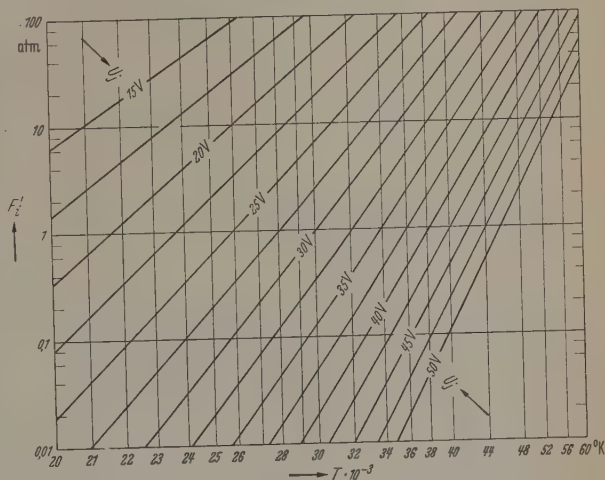


Abb. 2. Saha-Funktion F_i' in Abhängigkeit von der Temperatur für $g_{i+1} = g_i = 1$. Parameter Ionisierungsspannung U_i . Es ist $F_i' = g_{i+1}/g_i \cdot F_i$. Ordinatenwerte logarithmisch, Abszissenwerte wie $1/T$ aufgetragen

Da n_i bzw. m_h im Gültigkeitsbereich der Gln. (6) und (11) monoton mit der Temperatur absinkt und die Exponentialfunktion monoton steigt, durchläuft die Linienintensität bei einer bestimmten Temperatur ein Maximum, bei der die betreffende Linie optimal angeregt wird. Diese Temperatur soll, wie schon erwähnt, nach LARENZ [29] mit Normtemperatur bezeichnet werden.

Zur zahlenmäßigen Berechnung muß zuerst die Saha-Funktion/Gesamtdruck F_i/P bestimmt werden. Hierzu dient Abb. 2 mit U_i als Parameter. (Eine Darstellung der Saha-Funktion als Nomogramm findet sich bei UNSÖLD [5a].) Der für jede Temperatur gefundene Ordinatenwert F_i' ist mit $\frac{g_{i+1}}{g_i}$ dem Verhältnis

der statistischen Gewichte im Grundzustand (z.B. bei [5a]) zu multiplizieren, wobei man F_i erhält. Mit dem so gefundenen Wert geht man in Gl. (6) und erhält so $n_i = n_i(T)$. Abb. 3 zeigt das Beispiel von Al III-Ionen, wobei der das Plasma umgebende Atmosphärendruck als Gesamtdruck eingesetzt wurde, unter der Annahme, daß sich der Plasmadruck während des ganzen Funkenablaufes ständig mit der Umgebung ausgleicht. Hierfür gibt es theoretische Begründungen

[7], [36a], außerdem wirkt erleichternd, daß bei einer Fehlangebe des Druckes um eine Zehnerpotenz der Fehler in der Temperaturmessung nur 15% beträgt [29]. Schließlich ergibt sich der Verlauf der relativen Intensität $\varepsilon(T)$ durch Addition der Gerade $\exp -U_a/kT$ (in der $\log -1/T$ Darstellung).

In Abb. 4 ist die berechnete Funktion $\varepsilon(T)$ für drei weitere für die Temperaturbestimmung im Funkenplasma verwendete Linien angegeben. Damit

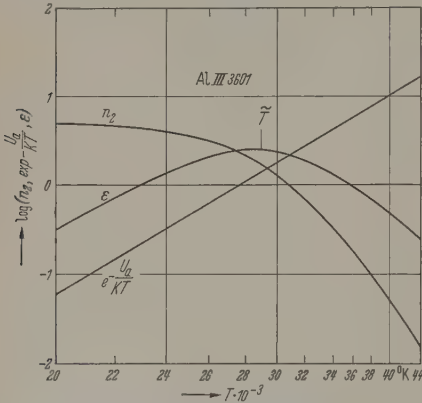


Abb. 3. Berechnung der $\varepsilon(T)$ -Skala am Beispiel der Linie Al III 3601. $P = 1$ atm. Ordinatenwerte logarithmisch, Abszissenwerte wie $1/T$ aufgetragen

läßt sich der Temperaturbereich zwischen 20000 und 60000° K überstreichen. Die ausgezogenen Kurven ergeben sich nach Gl. (13), also für den Fall, daß sich im Plasmaraum nur Teilchen eines Elementes befinden, die gestrichelten Kurven erhält man aus (14)

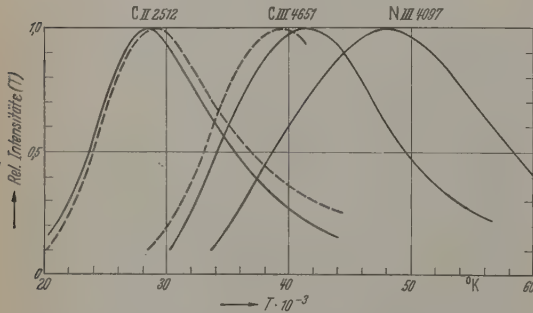


Abb. 4. Berechneter Verlauf der relativen Intensität $\varepsilon(T)$ für einige Ionenlinien, auf 1 im Maximum normiert. $P = 1$ atm. a — Anregung des Füllgases, nach (13) und (6) berechnet. b — Anregung des Elektroden dampfes (Kohlenstoff in einer Stickstoffatmosphäre) nach (14) und (11). In Gl. (11) wurden dabei folgende Werte benutzt: Linie C II 2512 $i = 1$ (N II mit $U_j = 29,60$ V); $h = 1$ (C II mit $U_j = 24,38$). Linie C III 4651 $i = 2$ (N III mit $U_j = 47,43$); $h = 2$ (C III mit $U_j = 47,86$)

für den Fall, daß das Plasma überwiegend aus dem Füllgas Stickstoff, d.h. aus N II- und N III-Ionen (Kurve C II 2512) bzw. aus N III- und N IV-Ionen (Kurve C III 4651) besteht und der Partialdruck des betreffenden Elementes sehr klein gegenüber dem des Füllgases ist. Man sieht dabei, daß sich die Kurve $\varepsilon(T)$ nicht wesentlich ändert. Hat man so die Funktion $\varepsilon(T)$ berechnet, so läßt sich unter gewissen Voraussetzungen der zeitliche Temperaturverlauf $T(t)$ des Funkenplasmas aus dem beobachteten zeitlichen Intensitätsverlauf $I(t)$ berechnen.

5. Neue Methodik der Temperaturmessung. Meßergebnisse

Bei jedem Einzelfunken, aufrechterhalten durch eine (aperiodisch gedämpft) oder mehrere Stromhalbwellen wird bei jeder Halbwelle (Energiezufuhr = Strom mal Brennspannung) die Temperaturskala von links (tiefe Temperaturen) nach rechts und dann mit Umkehrpunkt von rechts nach links (Abkühlung) durchschritten: Zur Zeit $t = 0$ ist das Plasma auf Zimmertemperatur, erhitzt sich dann wegen des Stromanstieges, die Temperatur erreicht schließlich ein Maximum T_m , das wegen zunehmender Kanalausbreitung (= Arbeitsleistung) je nach der Periodendauer des Stromes mehr oder minder zeitlich vor dem ersten Strommaximum liegt. Nach Überschreiten dieses Temperaturmaximums sinkt die Temperatur infolge Abkühlung von außen solange weiter, bis der Strom nach seinem Nulldurchgang in der zweiten Halbwelle wieder Energie zuführt und das Plasma sich wieder aufheizt usf. Betrachtet man die Intensitäts-Temperaturfunktion $\varepsilon(T)$ einer Linie (Abb. 4), so gibt es drei Möglichkeiten, daß die Intensität dieser Linie in dem geeigneten zeitlichen Verlauf ein Maximum zeigt:

a) Beim Aufheizen, wenn das Maximum der Temperatur T_m über der Normtemperatur \tilde{T} liegt (Normmaximum): $T_m > \tilde{T}$.

b) Im Maximum der Temperatur, wenn dieses Maximum unter der Normtemperatur der betrachteten Linie liegt (Funktionsmaximum): $T_m \leq \tilde{T}$.

c) Beim Abkühlen, wenn wie bei a) die Normtemperatur unter der Maximaltemperatur liegt: $T_m > \tilde{T}$.

Nach früheren Arbeiten [30] mit sehr kurz dauernden Stromentladungen und nach Messungen von MANDELSTAM [36a] ist es so gut wie sicher, daß die höchste Temperatur innerhalb der ersten Mikrosekunde nach dem Durchschlag entsteht. In dieser Anfangsperiode ist der Plasmaschlauch sehr dünn, die Stromdichte sehr hoch, daher das Plasma sehr heiß. Im weiteren Verlauf wird die Stromenergie auf ein größeres Volumen verteilt (Kanalausweitung) und kühlt daher trotz steigendem Funkenstrom im weiteren Verlauf der ersten Halbwelle ab. Unabhängig von diesen Beobachtungen soll hier versucht werden, ein Kriterium zu finden, das aussagt, zu welchem Zeitpunkt *spätestens* die Maximaltemperatur T_m überschritten ist, da dies für die vorgeschlagene Methode unerlässlich ist. Hätte man bei einer Linie im Fall a) $T_m > \tilde{T}$ ein Maximum beim Aufheizen, so müßte auch zu einem späteren Zeitpunkt der Fall c) eintreten, wenn die Temperaturskala nach links durchlaufen wird, d.h. es müßten zwei Maxima durchlaufen werden, eines beim Aufheizen, das zweite beim Abkühlen. Dieser Fall konnte bei keiner der vielen untersuchten Linien, auch nicht bei Atomlinien mit kleinem \tilde{T} , gefunden werden. Daraus ist zu schließen, daß die Aufheizung des Plasmas innerhalb der Auflösungszeit der Anordnung (0,1 μ sec) stattfindet. Als Sicherheitsfaktor für diese Annahme wird hier (Abb. 5) noch ein weiteres Zeitintervall dazugegeben, nämlich das Auftreten von Fall b), $\tilde{T} = T_m$: Das zeitlich am frühesten auftretende Maximum kann ein Norm- oder Funktionsmaximum sein. Dann sind alle späteren Maxima (bei der ersten Halbwelle) Normmaxima. Von den untersuchten Linien

die Linie Pb IV 2864 am frühesten auf, nämlich 0,9 μsec nach dem Durchschlag. Ab dieser Zeit geht nach den vorhergehenden Betrachtungen die Temperatur sicher. Alle Linienmaxima, die (bei der ersten Halbwelle) später folgen, sind auf Grund dieser Betrachtung Normmaxima, d.h. daß damit ist für den Zeitpunkt ihres Auftretens die Temperatur im Plasma festgelegt ist. Die Zuordnung der Flanken der Funktion $\varepsilon(T)$ zu dem beobachteten Linienverlauf (Abb. 5) wird dadurch eindeutig: Vor Erreichen des Normmaximums gilt die rechte Flanke von $\varepsilon(T)$, hernach die linke Flanke. Nach dieser Festlegung gilt eindeutig die Beziehung:

$$\varepsilon(T)_{\text{berechnet}} = I(t)_{\text{gemessen}}, \quad (15)$$

wobei beide Seiten im Maximum auf 1 normiert seien. Durch Auflösen nach T erhält man den gesuchten zeitlichen Temperaturverlauf $T(t)$. Das geschieht am einfachsten dadurch, daß man für jeden Zeitpunkt t_x den Intensitätswert $I(t_x)$ aus Abb. 5b abliest mit diesem Wert in die $\varepsilon(T)$ -Funktion (Temperaturskala) Abb. 4, eingeht und die dazugehörige Temperatur $T(t_x)$ entnimmt. Auf diese Weise erhält man die Temperaturkurven, wie sie in Abb. 5c für verschiedene Linien aus deren verschiedenen zeitlichen Verläufen dargestellt wurden.

Einer besonderen Beachtung bedarf die zweite Halbwelle des Stromes. Dabei steigt die Linienintensität wieder an und erreicht ein zweites Maximum. Da dieses wesentlich kleiner ist als das beim ersten Strommaximum, ist die Sicherheit gegeben, daß man sich bei der Intensitäts-Temperaturskala Abb. 4 immer noch auf dem linken Ast der $\varepsilon(T)$ -Skala bewegt. Dieses Maximum ist also kein Normmaximum mit der Temperatur \tilde{T} , sondern ein Funktionsmaximum, bedingt durch nochmaliges Aufheizen des Plasmas, wobei der Umkehrpunkt der Temperatur auf der linken Flanke der $\varepsilon(T)$ -Funktion stattfindet.

6. Fehlerbetrachtung und Diskussion

Die zur Temperaturbestimmung herangezogenen Gesetze setzen Temperaturgleichgewicht im Plasma (Saha-Gleichung und Boltzmann-Funktion), Absorptionsfreiheit der Linie ($\varepsilon \sim n_i$) und konstantes Volumen des Entladekanals voraus (wegen Abbildung des gesamten Funkens in den Monochromator). Eine Begründung dieser Annahmen ist daher unerlässlich.

6.1. Thermodynamisches Gleichgewicht

Den heutigen Vorstellungen über den Aufbau und Abbau des Funkenplasmas zufolge herrscht unmittelbar nach dem Durchschlag ($\approx 10^{-13}$ sec) bereits eine hohe Elektronentemperatur T_e , wobei das Gas noch nicht erhitzt ist. Durch Stöße erster Art überträgt ein Elektron bei jedem elastischen Zusammenstoß nur den kleinen Bruchteil m/M (etwa 5% bei H und etwa 0,0025% bei Pb) seiner kinetischen Energie, so daß viele Stöße d.h. eine endliche Einstellzeit nötig ist, in der die Elektronentemperatur T_e absinkt und die Gas-temperatur T_g steigt. Nach dieser Einstellzeit wird $T_e = T_g$, wobei T_g sein Maximum erreicht. Im folgenden bleibt $T_e = T_g$ und beide sinken schließlich auf die Außentemperatur ab. Die Einstellzeit wurde von WEIZEL und ROMPE [4] abgeschätzt. Sie geben

dafür die Formel an:

$$\tau(T_g = T_e) = \frac{1}{n \cdot q \cdot v} \cdot \frac{M}{m}. \quad (16)$$

Hierbei bedeutet:

- n = Teilchendichte
- v = Elektronengeschwindigkeit
- q = Stoßquerschnitt
- m = Elektronenmasse
- M = Teilchenmasse.

Die größte Unsicherheit dieser Formel ist der Wert q , der für viele Atome nur größenordnungs-

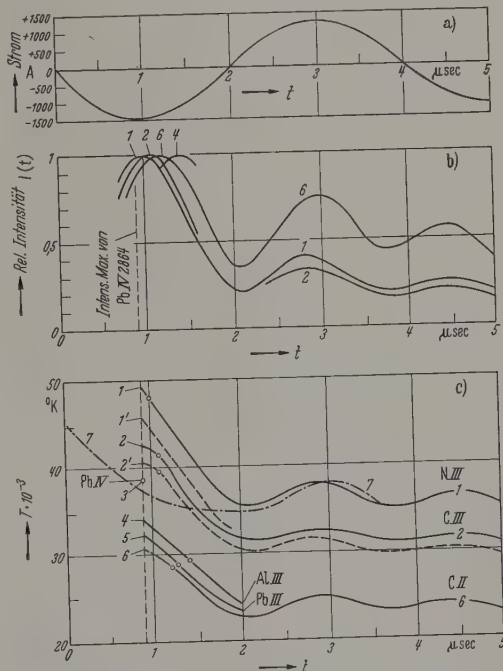


Abb. 5. Zeitlicher Verlauf a des Funkenstromes, b der beobachteten relativen Intensität $I(t)$, c der Temperatur $T(t)$. Kurven 1 mit 6 entsprechen den in Tabelle 1 aufgeführten Linien. Beim Temperaturverlauf ist die Normtemperatur jeweils durch einen Kreis angedeutet. Kurve 1' entsteht aus 1, wenn man mit Gl. (21) beim Intensitätsverlauf die Kanalausweitung berücksichtigt, also durch I dividiert. 2' ergibt sich an Stelle von 2, wenn man als Temperaturskala die gestrichelte Kurve von Abb. 4 benützt. 7 ist der Verlauf der Elektronentemperatur nach MANDELSTAM [36a] mit der Zweiliniemethode (N III 4097/N II 3995) gemessen. Da die dort verwendeten Entladungsparameter etwas anders sind ($C=0,25 \mu\text{F}$, $L=10 \mu\text{H}$, $f=100 \text{ kHz}$) wurde zum besseren Vergleich die Zeitachse auf gleiche Schwingungsdauer 1:2,5 reduziert.

Tabelle 1. Physikalische Größen der verwendeten Linien (Die Linien sind nach der Normtemperatur \tilde{T} geordnet)

Linie	i	g_i	g_{i+1}	U_i [eV]	U_a [eV]	$\tilde{T} \cdot 10^{-4}$ [°K]	Kurve in Abb. 5
N III 4097	2	6	1	47,43	30,45	48,0	1
C III 4651	2	1	2	47,86	32,18	41,5	2
Pb IV 2864	3	2	1	42,11	28,3	40,0 ?**	3
Al III 3601	2	2	1	28,44	17,81	29,5	4
Pb III 2562	2	1	2	31,9	23,6	29,0	5
C II 2512	1	6	1	24,38	18,66	28,5	6

* Die Normtemperatur \tilde{T} entspricht dem Maximum von Abb. 2.

** Statistische Gewichte unsicher.

mäßig bekannt ist. Unter Annahme eines wahrscheinlichen Wertes von q erhalten WEIZEL und ROMPE nach dieser Formel Einstellzeiten von 10^{-7} bis

10^{-5} sec, wobei das Letztere für schwere Atome gilt. Die einfachste Möglichkeit nachzuprüfen, ob sich in einem bestimmten Zeitpunkt der Funkenperiode die Gleichverteilung Elektronenenergie = Gasenergie eingestellt hat, ist die Bestimmung der Temperatur mit Hilfe von Linienintensitäten unter Verwendung von Linien mit möglichst verschiedenen Anregungs- und Ionisierungsspannungen von Elementen mit möglichst verschiedenen Massen. Es muß dann beim Zeitpunkt t die spektroskopisch bestimmte Temperatur T

$$T_i = T_i(U_j, U_a, M) \quad (17)$$

immer denselben Wert ergeben. Dabei ergibt sich aber die Schwierigkeit, wie von HULDT [6] nachgewiesen wurde, daß der Plasmaschlauch eine radiale Temperaturverteilung besitzt und daß eine Linie immer nur die Temperatur des Plasmateiles anzeigt, in dem sie maximal angeregt wird und keineswegs immer die Maximaltemperatur im Kern. Wenn daher zwei Linien zu einem bestimmten Zeitpunkt t zwei verschiedene Temperaturen ergeben, so kann man nicht unterscheiden, ob dies auf Fehlen des thermodynamischen Gleichgewichtes zurückzuführen ist, oder ob die beiden Linien verschiedenen heißen Hüllen des Plasmazylinders messen. Umgekehrt werden also nur Linien mit derselben Normtemperatur \tilde{T} dieselbe Temperatur ergeben, weil nur dann gesichert ist, daß sie die gleiche Kanalzone indizieren. Zu dem Kriterium (17) für Temperaturgleichgewicht tritt also die Nebenbedingung, daß für zwei Linien ist:

$$\tilde{T}(U_j, U_a) = \tilde{T}(U_{j_2}, U_{a_2}). \quad (18)$$

Betrachtet man unter diesem Gesichtspunkt Abb. 5c, so erkennt man, daß die Linie N 4097 III mit der höchsten Normtemperatur ($\tilde{T} = 48000^\circ \text{K}$) immer die höchste Temperatur indiziert, also die Temperatur in der Kernnähe mißt. Die nächste kältere Hülle wird durch die Linie C III 4651 ($\tilde{T} = 41500^\circ \text{K}$) indiziert. Eine Normtemperatur von etwa 30000°K haben die Linien C II 2512, Al III 3601 und Pb III 2562, die Massen der entsprechenden Atome verhalten sich wie 1:2,3:17, indizieren aber bis auf $\pm 5\%$ dieselbe Temperatur. Damit dürfte nach (17) sicher sein, daß das Gleichgewicht $T_g = T_e$ sich zumindest bei

$$\tau(T_g = T_e) \leq 0,9 \mu\text{sec} \text{ (gestrichelte Ordinate Abb. 5)}$$

eingestellt hat. Dieser Zeitpunkt, bei dem das erste beobachtete Maximum Pb IV 2864 auftritt, stellt eine obere zeitliche Grenze für τ dar. Temperaturmessungen zu früheren Zeitpunkten wurden wegen der Zweideutigkeit der $\varepsilon(T)$ -Funktion (s. oben) nicht angestellt.

Diese Betrachtungen nähern sich den Ergebnissen von MANDELSTAM [36a], der auf Grund von zwei unabhängigen Methoden einmal die Gastemperatur maß (interferometrische Bestimmung der Gasteilchenzahl und daraus die Gastemperatur) und mit Hilfe der Zweilinienmethode (mit berechneten Übergangswahrscheinlichkeiten für N-Ionen) die Anregungstemperatur ermittelte. Beide Methoden lieferten Temperaturen von etwa 40000°K in der ersten Mikrosekunde nach dem Durchschlag (in Abb. 5c eingetragen). Auf Grund dieser Messungen konnte er die Einstellgeschwindigkeit

$$\tau(\tilde{T}_e = T_g) \approx 0,1 \mu\text{sec}$$

bestimmen.

6.2. Absorptionsfreiheit

Die Proportionalität zwischen Intensität und Teilchendichte, Gl. (13) und (14), ist nur dann gegeben, wenn der von einem Volumenelement ausgesandte Strahlenkegel das Plasma absorptionsfrei durchsetzen kann, das Plasma also für die beobachtete Wellenlänge optisch dünn ist (Extinktionskoeffizient \times Konzentration \times Schichtdicke $\ll 1$). Abweichungen davon würden Fehler ergeben, die nicht zu unterscheiden wären von solchen infolge fehlenden Temperaturgleichgewichtes. Da die Proportionalität zwischen ε und n_i schon durch die Nebenbedingung (18) wegen der verschiedenen heißen Hüllen des Plasmaschlauches eingeschränkt wird, sind für die Sicherung der Absorptionsfreiheit weitere Argumente wünschenswert:

a) Die Teilchendichte im Funkenplasma ist verhältnismäßig gering gegenüber der in den genauer untersuchten Bogenplasmen. Nach MANDELSTAM [36a] beträgt sie bei 40000°K nur $4 \cdot 10^{-3}$ der Dichte bei Normaldruck und Zimmertemperatur. (Vgl. Abb. 1 $n_3 \approx 0,4 \cdot 10^{17}$ bei 50000°K gegenüber $n_0 \approx 4 \cdot 10^{17}$ bei 5000°K .)

b) Bei merklicher Absorption ist diese vom Linienprofil abhängig (KIRCHHOFF), d.h. die Absorption ist an den Linienflanken schwach, in der Mitte am stärksten. Bei merklicher Absorption ist daher zu erwarten, daß sich bei Messung an der Linienflanke ein anderer Verlauf $I(t)$ ergeben würde, als in der Linienmitte. Bei den hier benutzten Linien konnte in keinem Fall ein meßbarer Unterschied festgestellt werden, wenn man den Monochromator von der Linienflanke auf die Linienmitte durchdrehte.

6.3. Ausweitung des Funkenkanals

Bei der benutzten Anordnung wird der Funkenkanal in die Kollimatorlinse des Spektrographen abgebildet, der Spalt ist homogen ausgeleuchtet. Der Vervielfacher am Austrittsspalt mißt also die gesamte vom Funkenkanal emittierte Strahlung. Da in den obigen Rechnungen nur die relative Intensität ε eingeht, sind die am Oszillographen beobachteten Werte $I(t)$ zu korrigieren, wenn sich der Kanal ausweitet. Ist das Plasmavolumen V und der Kanalradius r , dann besteht bei Zylindersymmetrie die Proportionalität

$$I(t) = V(t) \cdot \varepsilon(t) \sim r^2(t) \cdot \varepsilon(t). \quad (19)$$

Über die Volumenausdehnung wurden von GLASER [13a] und MANDELSTAM [37] Untersuchungen angestellt, die in erster Näherung ergeben, daß

$$V \sim r^2 \sim t, \quad (20)$$

ist, d.h. daß das Volumen proportional mit der Zeit wächst. Betrachtet man Linien des Füllgases, so ist die $T(t)$ -Kurve nach folgender Gleichung zu korrigieren

$$I(t) \sim t \cdot \varepsilon(t). \quad (21)$$

Damit verschieben sich die Maxima der $\varepsilon(t)$ -Kurven in Richtung $t \rightarrow 0$ und zwar am meisten beim ersten (Normierungs-) Maximum. Außerdem werden diese um den Faktor $1/t$ erniedrigt, was sich am stärksten beim zweiten und den folgenden Maxima auswirkt. (Das erste Maximum ist normiert.) Für den Fall der Linie N III 4097 erhält man den in Abb. 5, Kurve 1' gestrichelten Temperaturverlauf. Diese korrigierte

temperatur liegt durchschnittlich 4000°K tiefer, die Form der $T(t)$ -Kurve bleibt erhalten. Ähnlich liegen die Korrekturen bei den anderen Linien.

6.4. Verdampfung

Bei der Berechnung der Linienintensitäten des Elektrodendampfes wurde, in Gl. (11), angenommen, daß der Anteil des Elektrodengases an der Gesamtteilchenzahl (\approx Teilchenzahl des Füllgases) konstant ist. Die Teilchenzahl des im Plasmaraum befindlichen Elektrodengases nimmt aber mit der Zeit zu, weil sich der Kanal ausweitet und außerdem die Teilchendichte mit zunehmender Temperatur wächst (konstanter Druck angenommen). In demselben Maße müßte von den Elektroden her Dampf des Elektrodengases nachgeliefert werden. Einen Anhaltspunkt geben die Messungen an Zn von BUNGE [48], der feststellte, daß die von den Elektroden abgedampfte Menge an Zn der durch das Plasma durchgeflossenen Elektrizitätsmenge $Q = \int i dt$ proportional ist, unabhängig von der Art der Entladung. Bei der vorliegenden nahezu undämpften Sinusschwingung (Abb. 5a) ergibt sich damit ein nahezu linearer Anstieg des verdampften Elektrodengases mit der Zeit, der sinusartig moduliert ist. Damit ist dargelegt, daß bei dem Verhältnis v Zähler und Nenner mit der Zeit ansteigen. Eine quantitative Überprüfung über die Konstanz von v läßt sich aber einfach durchführen: Man mißt ein und dieselbe Linie einmal im Füllgas und dann im Elektrodendampf, z. B. eine C-Linie in CO_2 mit Al-Elektroden und dann dieselbe Linie in N_2 mit C-Elektroden. Ergibt sich derselbe $T(t)$ -Verlauf, so ist man sicher, daß der Elektrodendampfanteil v konstant ist.

Dieser Versuch wurde an mehreren C-Linien durchgeführt, es konnte in einem Druckbereich des Füllgases zwischen 100 und 760 Torr innerhalb der Meßgenauigkeit keine Unterschiede festgestellt werden. Ganz anders liegen die Verhältnisse bei Drucken unter 10 Torr [44], wo das erste Maximum des Füllgases etwa 10mal so groß ist, wie das des Elektrodengases und das zweite Maximum umgekehrt.

7. Schlußfolgerung

Die gezeigte Methode der Temperaturmessung erreicht zwar nicht die Genauigkeit, wie man sie bei der Zweiliniemethode im Gleichstrombogen erwarten kann, dafür ist sie aber den durch den Funkenablauf bedingten verhältnismäßig „unsauberen“ Meßbedingungen angepaßt. Da man in der Linienauswahl nicht eingeschränkt ist und vor allem beliebige Ionenlinien heranziehen kann, von denen nur Anregungs- und Ionisierungsspannung, sowie statistisches Gewicht bekannt sein müssen, kann man den Kanal in verschiedenen heißen Hüllen zerlegen und auf die Temperatur des Kernes extrapolieren. Der Einfluß ungenau bekannter Größen auf das Meßergebnis, wie Druck im Plasma, Kanalausweitung und Verdampfung, ist gering im Vergleich zu Fehlern, die man erhält, wenn man bei der Zweiliniemethode mangels geeigneter Linie mit bekannter Übergangswahrscheinlichkeit irgendeine Zone zwischen Kanalrand und Kanalkern mißt, die irgendeine Temperatur zwischen der Zimmertemperatur und der des Kanals besitzen kann (vgl. VAN CALKER [41]). Daraus ergibt sich die Folgerung, daß man zwei Temperaturangaben bei hoch erhitzten Bögen oder

Funkenentladungen nur zueinander in Beziehung setzen kann, wenn die verwendeten Linien dieselbe Normtemperatur besitzen.

Zusammenfassung

Die hier angewandte Methodik der Temperaturmessung beruht darauf, daß im Plasma beim Durchschreiten der Temperaturskala jede Linie in ihrer Intensität zuerst ansteigt, bei einer bestimmten durch Anregungs- und Ionisationsspannung festgelegten Temperatur, der „Normtemperatur“, ein Maximum besitzt und dann wieder abfällt. Diese Intensitäts-Temperaturbeziehung wurde aus thermodynamischen Gleichungen berechnet. In einem Funkenplasma wird die Temperaturskala kurze Zeit nach jedem Durchschlag des Einzelfunkens, wo die höchste Temperatur $>40000^{\circ}\text{K}$ herrscht, nach tieferen Werten durchlaufen. Durch Zuordnung der oszillographisch gemessenen Intensität in Abhängigkeit von der Zeit zu der berechneten in Abhängigkeit von der Temperatur, läßt sich die Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit bestimmen.

Die Auswertung von zeitlich aufgelösten Linien mit sehr verschiedenen Ionisierungsspannungen und Elementen mit verschiedenen Atomgewichten weist darauf hin, daß sich trotz des nichtstationären Zustandes schon nach Bruchteilen von Mikrosekunden örtliches thermodynamisches Gleichgewicht einstellt. Bestimmend für die Hülle des Kanals, deren Temperatur von einer bestimmten Linie indiziert wird, ist die Normtemperatur. Linien mit gleicher Normtemperatur ergeben die gleichen Temperaturwerte und stammen damit aus ein und derselben Kanalhülle: In Kernnähe wurde, indiziert durch eine N III-Linie, eine Mikrosekunde nach der Entladung 48000°K gefunden, dann absinkend und mit dem Strom oszillierend eine Temperatur um 37000°K , mit einer C III- und verschoben 40000°K , absinkend auf 32000°K und schließlich mit Al III-, Pb III- und C II-Linien 32000°K absinkend auf 25000°K . Die Übereinstimmung der von verschiedenen Linien mit gleicher Normtemperatur indizierten Temperaturen beträgt $\pm 5\%$. Diskutiert wurden die Korrekturen, die anzubringen sind, wenn man die Kanalausweitung, den Einfluß der zeitlich ansteigenden Verdampfung und Unsicherheiten in den Angaben des Plasmadruckes berücksichtigt. Sie liegen auch in der Größenordnung von $\pm 5\%$.

Dem Leiter der Forschungsarbeit, Herrn Professor Dr. G. SCHEIBE, danken wir für tätige Anteilnahme an der Arbeit. Sie wurde mit Mitteln der Deutschen Forschungsgemeinschaft und des Forschungsfonds des Vereins Deutscher Eisenhüttenleute durchgeführt, wofür auch an dieser Stelle gedankt sei.

Für wertvolle Diskussionen sind wir den Institutskollegen, insbesondere Herrn Dr. E. GLOCK verbunden.

Literatur:

Grundlegende Arbeiten

- [1] PETERS, TH.: Z. Physik **144**, 612 (1956). — [2] PETERS, TH., u. H. MAECKER: Z. Physik **144**, 586 (1956). — [3] MAECKER, H.: Ergebn. exakt. Naturwiss. **25**, 293 (1951). — [4] WEIZEL, W., u. R. ROMPE: Theorie elektrischer Lichtbögen und Funken. Leipzig 1949. — [5] ENGEL, H., u. M. STEENBECK: Elektrische Gasentladungen. Berlin 1934. — [5a] UNSÖLD, A.: Physik der Sternatmosphären. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.

Theoretische Abhandlungen über Lichtbögen und Funken

- [6] HULDT, L.: Spectr. chim. Acta **7**, 264 (1955). — [7] DRABKINA, S.I.: Abh. sowj. Phys. **3**, 295 (1953). — [8] WEIZEL, W.: Z. Physik **135**, 639 (1953). — [9] STETTER, A.: Spectr. chim. Acta **5**, 460 (1953). — [10] CORLISS, C.H.: Spectr. chim. Acta **5**, 378 (1953). — [10a] UNSÖLD, A.: Z. Astrophys. **24**, 355 (1948). — [11] WEIZEL, W., u. R. ROMPE: Z. Physik **117**, 545 (1941). — [12] FREUNDLICH, E.: Handbuch der Physik, Bd. XI, S. 204 (1926). — [13] RUARK, A.E.: J. Opt. Soc. Amer. **11**, 199 (1925). — [13a] GLASER, G.: Z. Physik **143**, 44 (1955).

Temperaturbestimmung von Lichtbögen und Funken nach verschiedenen Methoden, soweit sie für Funken anwendbar sind

- [14] CUNDALL, C.M., u. I.D. CRAGGS: Spectr. chim. Acta **9**, 68 (1957). — [15] PETERS, TH., u. H. SCHENK: Z. Physik **140**, 119 (1955). — [16] STETTER, A.: Spectr. chim. Acta **5**, 350 (1953). — [17] OLSEN, H.N., u. W.S. HUXFORD: Phys. Rev. **89**, 336 (1953). — [18] TER HORST, D. TH., u. G.A.W. RUTGERS: Physica, Haag **19**, 565 (1953). — [19] MAECKER, H.: Z. Physik **135**, 13 (1953). — [20] JÜRGENS, G.: Z. Physik **134**, 21 (1952). — [21] BLITZER, L., and W.M. CADY: J. Opt. Soc. Amer. **41**, 440 (1951). — [22] CRAGGS, I.D., and W. HOPWOOD: Proc. Phys. Soc. Lond. **59**, 755 (1947). — [23] TER HORST, D. TH. I., H. BRINKMANN u. L.S. ORNSTEIN: Physica, Haag **2**, 562 (1935).

Temperaturbestimmung von Lichtbögen und Funken nach der Methode von MAECKER, LARENZ u. a.

- [24] MAECKER, H., u. TH. PETERS: Z. Physik **139**, 448 (1954). — [25] BUSZ, G., u. W. FINKELNBURG: Z. Physik **139**, 212 (1954). — [26] MAECKER, H.: Z. Physik **136**, 119 (1953). — [27] BURHORN, F., H. MAECKER u. TH. PETERS: Z. Physik **131**, 28 (1951). — [28] LARENZ, R.W.: Z. Physik **129**, 343 (1951). — [29] LARENZ, R.W.: Z. Physik **129**, 327 (1951).

Untersuchung spezieller, insbesondere kurzdauernder Vorgänge im Funkenentladungskanal

- [30] FELDKEIRCHNER, H., u. H. KREMPL: Arch. Eisenhüttenw. **27**, 621 (1956). — [31] CUNDALL, C.M., u. I.D. CRAGGS: Spectr. chim. Acta **7**, 149 (1955). — [32] LOEB, L.B.: Phys. Rev. **94**, 127 (1954). — [33] CALKER, J. VAN: Spectr. chim. Acta **5**, 476 (1953). — [34] CRAIG, R.D., and I.D. CRAGGS: Proc. Phys. Soc. Lond. **66**, 500 (1953). — [35] STEINHAUS, D.W., H.M. CROSSWHITE and G.H. DIEKE: J. Opt. Soc. Amer. **43**, 257 (1953). — [36] VAINSTEIN, L.A., A.M. LONTOVICH, L.P. MALYAVEIN u. L.S. MANDELSTAM: Zh. eksper. teor. Fiz. **24**, 326 (1953). — [36a] MANDELSTAM, L.S.: CS I VI (Amsterdam). Spektr. chim. Acta **11**, 457 (1956). — [37] GEGETSCHKORI, N.M.: Abh. sowj. Phys. **3**, 323 (1953). — [38] ABRAMSON, I.S., u. N.M. GEGETSCHKORI: Abh. sowj. Phys. **3**, 311 (1953). — [39] OLSEN, H.N., and W.S. HUXFORD: Phys. Rev. **87**, 922 (1952). — [40] CALKER, J. VAN: Spectr. chim. Acta **5**, 19 (1952). — [41] CALKER, J. VAN, u. H. BRAUNISCH: Z. Naturforsch. **11a**, 612 (1956). — [42] CALKER, J. VAN, u. K. LEHMANN: Exp. Techn. Physik **3**, 32 (1955). — [43] CALKER, J. VAN: Z. Naturforsch. **10a**, 697 (1955). — [44] SPÄTH, H.: Diss. Physikalisch-Chemisches Institut T.H. München 1958.

Über physikalische Daten des Elektrodenmaterials, insbesondere Verdampfungsgeschwindigkeit und Wärmeleitung

- [45] FORSYTHE, W.E.: Smithsonian Phys. Tables, p. 363, 1954. — [46] WEHLI, M., u. V. HARDUNG: Helv. phys. Acta **2**, 115 (1929). — [47] KAISER, H.: Spectr. chim. Acta **2**, 258 (1944). — [48] BUNGE, K.: Spectr. chim. Acta **10**, 133 (1957).

Dr. HELMUT SPÄTH und Dr. HANS KREMPL,

Physikalisch-Chemisches Institut
der Technischen Hochschule, München

Röntgenographische Untersuchungen an mechanisch und thermisch bearbeiteten (100) Steinsalzoberflächen

Von FRITZ ASSELMAYER und WALTER BIENERT

Mit 12 Textabbildungen

(Eingegangen am 29. August 1959)

I. Einleitung

Einkristalle sind im allgemeinen nicht streng periodisch über einen größeren Bereich aufgebaut, sondern besitzen eine sog. Mosaikstruktur. In neuerer Zeit konnte das Auftreten dieser Mosaikstruktur im wesentlichen auf Versetzungen zurückgeführt werden [1], [2]. Es ist jedoch bisher nicht möglich, mit Hilfe der Theorie von den Versetzungen quantitative Angaben über die Größe der einzelnen kohärenten Gitterbereiche und ihre gegenseitige Verschwenkung zu machen. Diese Werte sind bei den einzelnen Kristallarten sehr verschieden und hängen außerdem stark von den Wachstumsbedingungen und der späteren Behandlung des Einkristalls ab. Besonders ausgeprägt ist diese Abhängigkeit der Mosaikstruktur von der äußeren Behandlung des Einkristalls bei mechanischer Behandlung der Oberfläche. Diese Art von Mosaikstruktur ist zwar nur auf eine schmale Schicht der Oberfläche beschränkt, aber oft von großer technologischer Bedeutung.

Ein typisches Beispiel dafür ist das im kubischen System kristallisierende Steinsalz. Durch Bearbeitung der Oberfläche werden ihre Eigenschaften in weiten Grenzen verändert. RAETHER [3] konnte mittels Reflexion von Elektronenstrahlen zeigen, daß der

NaCl-Einkristall beim Schleifen oder Polieren an der Oberfläche in einzelne Mosaikblöcke aufrichtet, die nicht mehr genau nach den kristallographischen Achsen des darunterliegenden Mutterkristalls orientiert sind.

Eine andere Methode der Untersuchung des Kristallaufbaues bedient sich der Röntgenstrahlen. Diesdringen wesentlich tiefer als Elektronenstrahlen in den Kristall ein. Sowohl die Breite der Reflexionskurven als auch das integrale Reflexionsvermögen erlauben Rückschlüsse auf die Mosaikstruktur des Kristalls. BRAGG, JAMES und BOSANQUET [4] wiesen bereits auf die starke Zunahme der reflektierten Intensität beim Schleifen und Polieren einer (100) NaCl-Oberfläche hin, SAKISAKA [5] untersuchte diesen Effekt bei verschiedenen Kristallarten.

Die durch das Bearbeiten der Oberfläche entstandenen Störungen im Kristallgefüge kann man durch Rekristallisation teilweise wieder beseitigen. ASSELMAYER [6] fand, daß die Resistenz gegenüber Wasserdampf bei polierten Flächen durch Tempern sehr verbessert werden kann. Systematische Untersuchungen erfolgten durch F. ASSELMAYER und H. RIEDEL [7].

Aufgabe der vorliegenden Arbeit war es, die Änderung der Oberflächenstruktur systematisch zu

ersuchen. Es sollte einerseits geprüft werden, ob mit Hilfe der Reflexion von Röntgenstrahlen quantitative Angaben über die Größe der einzelnen Mosaikblöcke und ihre gegenseitige Verschwenkung gemacht werden kann. Weiterhin sollte die Frage geklärt werden, welchen Einfluß das Tempern auf die Mosaikstruktur des Kristallgefüges hat.

II. Theorie

Die Bragg'sche Gleichung gibt bei gegebener Wellenlänge der verwendeten Röntgenstrahlung und bekanntem Netzebenenabstand den Winkel der selektierten Reflexion an. Dieser Winkel ist strukturunempfindlich, d. h. er hängt nicht ab von irgendwelchen Störungen des Kristallgefüges.

Anders verhält es sich dabei aber mit dem integralen Reflexionsvermögen, also dem Verhältnis zwischen reflektierter und einfallender Intensität. Störungen des Kristallbaues können das Reflexionsvermögen in weitem Maße beeinflussen. Auch der Winkelbereich, in welchem die reflektierte Intensität in der Nähe des Bragg'schen Winkels nennenswert von Null verschieden ist, wird bestimmt durch die Störungen bzw. den Aufbau des Kristallgitters.

Als Maß für die reflektierte Intensität wird das integrale Reflexionsvermögen verwendet. Dieses ist folgendermaßen definiert: Ein paralleles, monochromatisches Röntgenstrahlbündel falle auf einen Kristall. Bei einem Winkel θ in der Nähe des Bragg'schen Winkels θ_0 werde ein Bruchteil $R(\theta)$ reflektiert. Das integrale Reflexionsvermögen \bar{R} wird dann

$$\bar{R} = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\theta) d\theta. \quad (1)$$

Der Integrationsbereich darf dabei stets bis ins Unendliche erstreckt werden, weil $R(\theta)$ nur in einem sehr schmalen Bereich um θ_0 von Null verschieden ist.

Theoretisch wurde das integrale Reflexionsvermögen für die beiden Grenzfälle des Idealkristalls und des vollkommenen Mosaikkristalls berechnet. Unter letzterem versteht man ein Kristallgitter, dessen einzelne kohärente Gitterbereiche so klein sind, daß man die Wechselwirkung zwischen Primärwelle und reflektierter Welle sowie der reflektierten Wellen untereinander vernachlässigen kann. Für diesen Fall ist das integrale Reflexionsvermögen eines einzelnen Kristallblockes proportional seinem Volumen

$$\bar{R} = Q \cdot \Delta V. \quad (2)$$

Der Proportionalitätsfaktor Q ist strukturunempfindlich und hängt bei gegebener Wellenlänge und Gitterart nur noch vom Einfallswinkel ab. Für unpolarisierte Strahlung ergibt sich bei dem Mosaikkristall für Q

$$Q = \frac{N^2 \cdot \lambda^3}{\sin 2\theta_0} \cdot |F|^2 \cdot \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta_0}{2}, \quad (3)$$

dabei stellt N die Zahl der Atome pro Volumeneinheit, λ die Wellenlänge, θ_0 den Bragg'schen Winkel und F den Atomfaktor für die betreffende Art von Gitterbausteinen dar.

Die Größe $(e^2/mc^2)^2$ ist die gestreute Intensität an einem einzelnen Elektron und $\frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta_0)$ berücksichtigt den Polarisationsinfluß.

Für den Fall der symmetrischen Bragg-Reflexion an einer Kristalloberfläche erhält man durch Integration der Gl. (2) über die verschiedenen Schichten der Oberfläche

$$\bar{R} = \frac{Q}{2 \cdot \mu}. \quad (4)$$

Dabei ist μ der gewöhnliche Absorptionskoeffizient.

Bei einem Idealkristall ergibt sich für das integrale Reflexionsvermögen \bar{R}

$$\bar{R}_{\text{ideal}} = \frac{8 \cdot N \cdot \lambda^2}{3\pi \sin 2\theta_0} \cdot |F|^2 \cdot \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta_0). \quad (5)$$

Der augenfälligste Unterschied gegenüber der Formel für den Mosaikkristall ist neben der verschiedenen Abhängigkeit von λ und F das Fehlen der Abhängigkeit von μ . Dies wird dadurch verständlich, daß beim Idealkristall die Schwächung des Primärstrahles nicht durch die gewöhnliche Absorption, sondern durch Interferenz bedingt ist.

Zwischen den beiden Grenzfällen des Idealkristalls und des vollkommenen Mosaikkristalls gibt es Übergänge. Um diese rechnerisch erfassen zu können hat man zwei Begriffe eingeführt, die primäre und die sekundäre Extinktion.

Die primäre Extinktion berücksichtigt die Wechselwirkung der einzelnen Wellen innerhalb eines Kristallites. Diese Wechselwirkung hat zur Folge, daß die unteren Atomebenen dieses Kristallites von geringerer Intensität getroffen werden. Das Reflexionsvermögen ist nicht mehr proportional dem Volumen. Nach DARWIN [8], [9] kann man den Effekt auch dadurch berücksichtigen, daß man das „spezifische Reflexionsvermögen“ Q [den Proportionalitätsfaktor in Gl. (2)] ersetzt durch eine Größe Q' , wobei

$$Q' = \frac{\Im g(pq)}{(pq)} \cdot Q \quad (6)$$

ist. Dabei bedeutet p die Zahl der reflektierenden Ebenen eines Kristallblockes und q die von einer einzelnen Ebene reflektierte Amplitude. Setzt man $d = p \cdot a$, wobei d die lineare Teilchengröße und a die Gitterkonstante darstellt, kann man die für die Korrektur (6) maßgebliche Größe $p \cdot q$ ausdrücken durch die Gleichung

$$p \cdot q = d \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot Q \cdot \cotg \theta_0}{\lambda}}. \quad (7)$$

Nach RENNIGER [10] erhält man für Cu $K\alpha$ -Strahlung und NaCl folgende Zahlenwerte für obige Gleichung

$$(p \cdot q)_{200} = 6,55 \cdot 10^{-3} \cdot d,$$

$$(p \cdot q)_{400} = 1,67 \cdot 10^{-3} \cdot d,$$

$$(p \cdot q)_{600} = 0,68 \cdot 10^{-3} \cdot d.$$

Abb. 1 zeigt den Verlauf der Funktion $\frac{\Im g x}{x}$ bei den verschiedenen Ordnungen mit den angegebenen Zahlenwerten für $x = p \cdot q$.

Bei der sekundären Extinktion wird im Gegensatz zur primären nicht ein einzelner Kristallblock betrachtet, sondern ein Kristallgefüge, das aus vielen einzelnen gegeneinander verschwenkten Blöcken besteht. Man berücksichtigt bei dieser Korrektur, daß die Primärintensität, welche die unteren Kristallschichten erreicht, nicht nur durch die gewöhnliche

Absorption geschwächt wird, sondern auch durch Reflexion in den oberen Kristallschichten. Dieser Effekt wird um so stärker, je weniger die einzelnen Kristallite gegeneinander verschwenkt sind.

Führt man eine Funktion $g(u)$ als den Bruchteil der Kristallblöcke ein, die um einen Winkel u gegenüber der kristallographischen Hauptrichtung verschwenkt sind, so gilt nach JAMES [11] für das integrale Reflexionsvermögen \bar{R}

$$\bar{R} = \frac{Q}{2(\mu + \alpha_2 Q)}, \quad (8)$$

wobei

$$\alpha_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(u) \cdot du \quad (9)$$

ist. Die Größe α_2 in (9) läßt sich anders darstellen, wenn man die Annahme macht, daß die Verschwen-

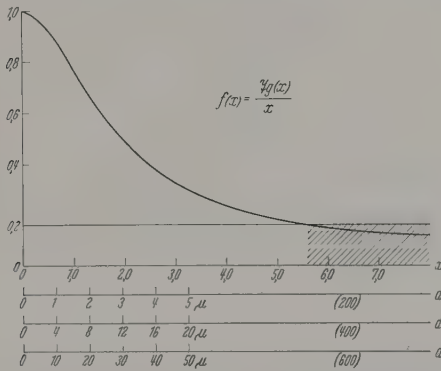


Abb. 1. Verlauf der Funktion $\frac{2g(x)}{x}$ bei den verschiedenen Reflexionsordnungen mit den angegebenen Zahlenwerten für $x = p \cdot q$

kungsfunktion $g(u)$ der Kristallite um ihre Hauptrichtung eine Gaußsche Normalverteilung darstellt. Dann kann man $g(u)$ in der Form schreiben

$$g(u) = \frac{\sqrt{\ln 2}}{h_v \cdot \pi} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{h_v^2} \cdot u^2}, \quad (10)$$

wobei h_v die Halbwertsbreite der Verschwenkungsfunktion darstellt. In diesem Fall läßt sich die Gl. (9) integrieren und man erhält für α_2

$$\alpha_2 = \frac{1130}{h_v} \left(\frac{1}{\text{Bogenminuten}} \right). \quad (11)$$

In Formel (9) ist, wie bereits erwähnt, nur der Einfluß der Verschwenkung auf die sekundäre Extinktion berücksichtigt. Einen weiteren Einfluß hat aber auch die Größe der einzelnen Kristallite. Denn nach der Laueschen Theorie haben die durch die Braggische Gleichung festgelegten Interferenzmaxima bei endlicher Kristallgröße auch eine endliche Halbwertsbreite. $\varphi(\xi)$ sei die bekannte Lauesche Interferenzfunktion im eindimensionalen Raum. Sie gibt die Verteilung der reflektierten Intensität in der Nähe des Braggischen Reflexionswinkels wieder und kann ebenfalls weitgehend durch eine Normalverteilung angenähert werden. Die Größenordnung der Halbwertsbreite dieser Verteilung ist nach JAMES [12] gegeben durch das Verhältnis Wellenlänge zu Teilchengröße. $g(u)$ war der Bruchteil der Kristallblöcke, die um einen

Winkel u gegenüber der kristallographischen Hauptrichtung verschwenkt sind. Für den Bruchteil g_v der Blöcke, die unter Berücksichtigung ihrer endlichen Größe in die Richtung u reflektieren, erhält man:

$$g_{\text{eff}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cdot g(\xi - u) \cdot d\xi. \quad (12)$$

Setzt man in Gl. (12) die Funktionen $g(u)$ und $\varphi(\xi)$ ein und führt die Integration durch, so erhält man

$$g_{\text{eff}}(u) = \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{h_v^2 + h_T^2}} \cdot \exp \left\{ -u^2 \cdot \frac{\ln 2}{h_v^2 + h_T^2} \right\}, \quad (13)$$

wobei h_v bzw. h_T die Halbwertsbreiten der Verschwenkungsfunktion bzw. der Interferenzfunktion darstellen. Setzt man diesen Ausdruck in Gl. (9) ein, so erhält man durch nochmalige Integration für den Koeffizienten α_2 der sekundären Extinktion

$$\alpha_2 = \sqrt{\frac{\ln 2}{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{h_v^2 + h_T^2}}. \quad (14)$$

Vergleicht man Gl. (11) mit (14), so sieht man, daß bei Berücksichtigung der Teilchenverbreiterung die Größe h_v ersetzt werden muß durch den Ausdruck $\sqrt{h_v^2 + h_T^2}$.

Um die sekundäre Extinktion zu berechnen, muß also der Ausdruck $\sqrt{h_v^2 + h_T^2}$ ermittelt werden. Das gelingt, wenn man die Breite der Reflexionskurve bestimmt, d. h. den Winkelbereich ausmißt, in welchen die reflektierte Intensität in der Nähe des Braggischen Winkels ϑ_0 von Null verschieden ist. Die Reflexionskurve setzt sich zusammen aus den beiden Komponenten „Verschwenkung“ und „Teilchenverbreiterung“. Da beide Funktionen durch eine Normalverteilung angenähert werden können, würde also jede der beiden Komponenten für sich als Reflexionskurve eine Normalverteilung ergeben. Die resultierende Reflexionskurve $R(u)$ erhält man durch Superposition der beiden einzelnen Kurven $g(u)$ und $\varphi(\xi)$. Diese Superposition ergibt ähnlich wie in Gl. (12) bzw. (13)

$$R(u) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi) \cdot \varphi(\xi - u) \cdot d\xi \quad (15)$$

bzw.

$$R(u) \sim \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{h_v^2 + h_T^2}} \cdot \exp \left\{ -u^2 \cdot \frac{\ln 2}{h_v^2 + h_T^2} \right\}. \quad (16)$$

Der Ausdruck $h_v^2 + h_T^2$ im Exponenten von Gl. (16) stellt aber bei einer Normalverteilung das Quadrat der Halbwertsbreite dar. Damit ist gezeigt, daß die in Gl. (14) stehende Größe $\sqrt{h_v^2 + h_T^2}$ als die Halbwertsbreite der Reflexionskurve identifiziert werden und somit direkt aus der experimentell ermittelten Reflexionskurve entnommen werden kann.

Die mittlere Verschwenkung allein kann im allgemeinen aus der Reflexionskurve nicht explizit entnommen werden, da stets ein gewisser Anteil von Teilchenverbreiterung vorhanden ist. Mit Hilfe des fokussierenden Verfahrens kann jedoch die Teilchengröße direkt ermittelt werden. Die Messungen zeigten, daß im vorliegenden Fall die Teilchenverbreiterung nur einen unbedeutenden Anteil an der Breite der Reflexionskurven hatte. Man macht bei fast allen untersuchten Fällen einen Fehler von weniger als 10%, wenn man die Breite der Reflexionskurven nur auf die Verschwenkung zurückführt.

Die mittels Reflexion von Röntgenstrahlen erhaltenen Aussagen beziehen sich nur auf einen schmalen Bereich in der Nähe der Oberfläche. Es ist im allgemeinen üblich, als mittlere Eindringtiefe diejenige Schichtdicke zu definieren, nach welcher die Intensität der eindringenden Welle auf den $1/e$ ten Teil abgesunken ist. Da aber hier interessiert, aus welcher Tiefe durch die Reflexion Aussagen zu erwarten seien, wurde eine andere Definition gewählt. Man denke sich dazu den Kristall durch eine Ebene parallel zur Oberfläche in zwei Hälften zerlegt. Der Abstand dieser Ebene von der Oberfläche sei die „wirksame Tiefe“, wenn die Ebene so gelegt wurde, daß die Hälfte der reflektierten Intensität von dem Gebiet oberhalb dieser Ebene kommt. Mathematisch lautet diese Formulierung folgendermaßen: dE sei der Beitrag zur gesamten reflektierten Intensität von einer Schicht der Dicke dt in einer Tiefe t . Dann gilt für die „wirksame Tiefe“ t_w

$$\int_0^{t_w} dE = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dE \quad (17)$$

Es wird nach (2)

$$dE = J(t) \cdot R = J(t) \cdot Q \cdot e^{-\mu \sin \vartheta_0} \cdot dt. \quad (18)$$

Setzt man diesen Wert für dE in (17) ein, so erhält man nach Durchführung der Integration

$$t_w = \frac{\ln 2 \cdot \sin \vartheta_0}{2\mu}. \quad (19)$$

Für $\text{Cu K}\alpha$ -Strahlung und NaCl ergeben sich die Zahlenwerte

$$(200) \quad t_w = 6 \mu$$

$$(400) \quad t_w = 12 \mu$$

$$(600) \quad t_w = 18 \mu.$$

Berechnet man allgemein den Bruchteil p von der gesamten reflektierten Energie E , der aus einer Schicht zwischen $t=0$ und $t=\xi$ kommt, erhält man den Ausdruck

$$p = 1 - e^{-2\mu \frac{\xi}{\sin \vartheta_0}}. \quad (20)$$

Abb. 2 zeigt die zahlenmäßige Auswertung dieser Beziehung in halblogarithmischer Darstellung für die Reflexion an (200). Wie daraus zu ersehen ist, kommt der überwiegende Teil der reflektierten Intensität, nämlich 75% aus einer Schicht in der Tiefe zwischen 1 und 15μ .

Ausgehend von diesen Grundlagen sollen nun speziell Steinsalzoberflächen hinsichtlich ihres integralen Reflexionsvermögens und ihrer Reflexionsbreite untersucht werden.

Es interessiert dabei der Aufbau der Oberfläche bei verschiedenen mechanischen Bearbeitungszuständen (Schleifen, Polieren) sowie die Änderung dieses Aufbaues bei Temperung bei verschiedenen Temperaturen und Zeiten.

III. Apparatur

Zur Messung der Reflexionskurven und des integralen Reflexionsvermögens wurde das bekannte Prinzip des Doppelkristallspektrometers nach EHRENBURG und MARK [13] verwendet. Eine ausführliche Theorie über dieses Instrument findet sich bei JAMES [14] und SANDSTRÖM [15]. Ein Röntgenstrahlbündel fällt auf einen feststehenden ersten Kristall, wird von diesem reflektiert und trifft auf den zweiten Kristall. Dieser zweite Kristall wird um seine Achse gedreht und bei jeder Winkelstellung die gesamte, von ihm reflektierte Leistung gemessen. Man unterscheidet zwei Stellungen der beiden Kristalle, die Parallel- oder $(n, -n)$ -Stellung und die Antiparallel- oder (n, n) -Stellung. In der Parallelstellung, die hier nur in Frage kommt, tritt keine spektrale Dispersion auf, da alle Wellenlängen, die vom ersten Kristall reflektiert werden, gleichzeitig auch am zweiten Kristall zur Reflexion gelangen.

Ist der Kristall K_2 um einen Winkel β gegenüber der Parallelstellung verdreht, ergibt die Rechnung für die vom zweiten Kristall reflektierte Leistung

$$P(\beta) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} J_0(\alpha) \cdot R_1(\alpha) \cdot R_2(\alpha - \beta) d\alpha. \quad (21)$$

Dabei bedeutet $J_0(\alpha)$ die Winkelverteilung des auf den ersten Kristall auftreffenden Strahles, R_1 bzw. R_2 ist das Reflexionsvermögen der beiden Kristalle. Den Integrationsgrenzen α_1 und α_2 entspricht die Horizontaldivergenz des Primärstrahles. Die Größe $J_0(\alpha) \cdot R_1(\alpha)$ in Gl. (21) bedeutet die Winkelverteilung der auf den zweiten Kristall auftreffenden Strahlung. Sorgt man durch genügend enge Blenden dafür, daß die Divergenz dieser auf K_2 auftreffenden Strahlung sehr klein wird gegenüber der Reflexionsbreite des zweiten Kristalls, geht (21) über in

$$P(\beta) \sim R_2(\beta). \quad (22)$$

In der Grenze für unendlich feine Blenden vor und hinter dem ersten Kristall, stellt also die gemessene Verteilung $P(\beta)$ direkt die Reflexionskurve des zweiten Kristalls dar.

Für endliche, aber sehr feine Blenden kann man eine Abschätzung machen, bis zu welcher Genauigkeit die gemessene Funktion $P(\beta)$ die Reflexionskurve des zweiten Kristalls wiedergibt. Unter der Annahme einer Normalverteilung sowohl für die gesuchte Reflexionskurve als auch für die Primärintensität (die auf K_2 auftreffende Intensität) setzt sich die gemessene Halbwertsbreite h_p folgendermaßen zusammen:

$$h_p^2 = h_1^2 + h_2^2. \quad (23)$$

Dabei ist h_1 die Winkeldivergenz des auf K_2 auftreffenden Strahles und h_2 die gesuchte Halbwertsbreite von K_2 .

Für den Fehler, der entsteht, wenn man die gemessene Halbwertsbreite h_p gleich der gesuchten Halbwertsbreite h_2 setzt, erhält man

$$\frac{h_p - h_2}{h_p} = \frac{1}{2} \frac{h_1^2}{h_2^2}. \quad (24)$$

Den schematischen Aufbau des Gerätes zeigt Abb. 3. In der Mitte eines großen Teilkreises T ist der Kristall K_2 mit seiner Halterung befestigt. Über einen

11 cm langen Arm kann er mit einer Mikrometerschraube M_2 um eine, in seiner zu untersuchenden Fläche liegende Achse gedreht werden. Die Steigung der Mikrometerschraube beträgt 0,25 mm/Umdrehung, die Meßtrommel ist in 150 Teile geteilt. Es entspricht ein Skalenteil auf der Meßtrommel einem Winkel von 3,2 Bogensekunden. Die von K_2 reflektierte Strahlung wird vom Zählrohr Z aufgefangen. Der Abstand K_2 - Z beträgt ungefähr 20 mm, die Öffnung des Zählrohrs 20 mm, so daß gewährleistet ist, daß die gesamte von K_2 reflektierte Strahlung vom Zählrohr erfaßt wird. Der Zählrohrträger ist außerdem noch um die Achse von K_2 schwenkbar. Das gesamte Spektrometer hat eine Dreipunktauflage auf der Unterlage. Es ist um denjenigen der drei Punkte, der genau unter K_1 liegt, drehbar. Der Kristall K_1 kann ebenso wie K_2 um eine in seiner Oberfläche

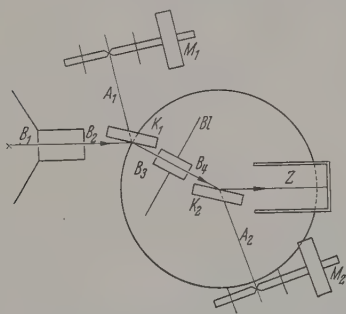


Abb. 3. Schematischer Aufbau des Doppelkristallspektrometers. K_1 , K_2 Kristalle; B_1 , B_2 , B_3 , B_4 Blenden; M_1 , M_2 zwei Mikrometerschrauben; A_1 , A_2 Hebelarme zur Übertragung der Drehung auf die Drehachsen der Kristalle; BL Bleiblech zum Schutz gegen Streustrahlung; Z Zählrohr

liegende Achse gedreht werden. Das geschieht wieder mittels eines Armes A_1 und der dazugehörigen Mikrometerschraube M_1 . Von den vier Rundblenden sind jeweils zwei, nämlich B_1 und B_2 sowie B_3 und B_4 mittels eines Rohres fest miteinander verbunden. Die Blenden B_1 und B_2 von je 0,7 mm Durchmesser sind direkt an der Röntgenröhre befestigt. Das zweite Blendensystem ($B_3=1$ mm und $B_4=0,3$ mm) befindet sich zwischen den beiden Kristallen. Zur Halterung der beiden Kristalle dienen zwei Goniometerköpfe. Sie besitzen zwei aufeinander senkrecht stehende Schlittenführungen zur Parallelverschiebung und die Möglichkeit der Neigung um zwei Achsen. Die beiden Drehachsen sind längs eines Kegels trennbar. Dadurch wird gewährleistet, daß der Kristall mit dem Goniometerkopf nach erfolgter Justierung jederzeit aus seiner Lage entfernt und reproduzierbar wieder zurückgebracht werden kann. Die Justierung erfolgte mit Hilfe eines Kathedometers. Es ist notwendig, daß die Drehachsen zueinander parallel sind und daß die Oberflächen der zu untersuchenden Kristalle in den Drehachsen liegen.

Durch eine photographische Aufnahme wurde die Horizontaldivergenz des auftretenden Strahles bestimmt. Als Kristall K_1 diente dabei, sowie bei allen anderen Messungen, eine geschliffene und anschließend mehrmals polierte (100) NaCl-Fläche. Die Auswertung der Aufnahme ergab für die Winkeldivergenz eine Halbwertsbreite von $2h_1=1,9'$. Setzt man diesen Wert in Gl. (24) ein, so erhält man das Ergebnis, daß der Fehler bei der Bestimmung der gesuchten Halb-

wertsbreite von K_2 kleiner als 10% bleibt, solange diese größer als $4,2'$ ist. Das trifft für die meisten untersuchten Kristalle zu. Die Vertikaldivergenz des Strahlenbündels ergab sich nach der Aufnahme zu $\Phi=2,7 \cdot 10^{-3}$. Nach SCHWARZSCHILD [16] bedeutet das eine Verbreiterung von ungefähr $10''$. Diese Verbreiterung infolge Justierungsfehlern ist also gegenüber der durch die Horizontaldivergenz bedingten von $1,9'$ zu vernachlässigen.

Die Röntgenstrahlen wurden mittels einer offenen, an der Pumpe betriebenen Röhre erzeugt. Die Spannung betrug je nach der erforderlichen Intensität 15 bis 35 kV. Zur Beseitigung der störenden $Cu K\beta$ -Linie wurde ein Nickelfilter verwendet. Zum Nachweis der Röntgenstrahlung diente ein Interferenzzählrohr mit einer Massenbelegung des Fensters von $2,2 \text{ mg/cm}^2$. Da es sich dabei um ein Auslösezählrohr handelte, war sein Auflösungsvermögen begrenzt. Aus diesem Grunde mußte bei der Messung der Primärintensität diese durch Aluminiumfolien bekannter Dicke meßbar geschwächt werden.

Zur Messung des integralen Reflexionsvermögens wurde der Kristall K_2 mittels eines Synchronmotors über einen größeren Winkelbereich in der Nähe des Braggischen Winkels gedreht. Das integrale Reflexionsvermögen ergibt sich dann zu

$$\bar{R} = \frac{E \cdot \omega}{I_0}, \quad (25)$$

wobei ω die Winkelgeschwindigkeit der Drehung, I_0 die Primärintensität und E die gesamte während der Drehung reflektierte Energie ist. Von E ist dabei noch der stets vorhandene Untergrund abzuziehen.

An die gemessenen Werte des integralen Reflexionsvermögens sind nach RENNIGER [10] noch zwei Korrekturen anzubringen. Erstens ist bei der verwendeten Röhrenspannung stets ein gewisser Anteil von $\lambda/2$ aus dem Bremsspektrum vorhanden. Dieser Anteil von $\lambda/2$ wird bei der Bestimmung von I_0 mitgemessen, während er bei der Messung der am zweiten Kristall reflektierten Intensität E wesentlich schwächer in Erscheinung tritt. Die Größe dieses Effektes wurde durch zusätzliche Aluminiumfilter bestimmt. Sämtliche Werte für das integrale Reflexionsvermögen mußten deshalb um 1,5% erhöht werden.

Eine zweite Korrektur muß wegen der Vorpolarisation an Kristall K_1 angebracht werden. Die Formeln für das integrale Reflexionsvermögen sind nämlich für den Fall angegeben, daß unpolarisierte Strahlung verwendet wird. Durch die Reflexion an K_1 ist aber die auf K_2 auftreffende Strahlung vorpolarisiert. Auch diese Korrektur läßt sich abschätzen, sie wurde bei den mitgeteilten Meßwerten bereits berücksichtigt.

Eine Abschätzung der möglichen Fehlerursachen ergab, daß die Genauigkeit bei der Bestimmung des integralen Reflexionsvermögens rund 7% betrug. Dieser relativ große Fehler kommt von der Unsicherheit des Schwächungsfaktors der Filter. Da aber im allgemeinen nur die Änderung der Werte beim Bearbeiten der Oberfläche oder beim Tempern interessiert, fällt diese Unsicherheit heraus und es kann für die Relativbestimmungen des integralen Reflexionsvermögens mit einer Genauigkeit von 2% gerechnet werden.

IV. Meßergebnisse

1. Geschliffene Kristalle

Die verwendeten NaCl-Einkristalle wurden durch wachsen an einen gekühlten Mutterkristall aus der Schmelze gezogen. Die untersuchten Platten von etwa $20 \times 20 \times 5$ mm Kantenlänge waren parallel zu den (100) Ebenen des Kristalls herausgespalten. Diese Oberflächen wurden mit SiC verschiedener Körnung geschliffen.

Bei einer Gruppe von geschliffenen Kristallen wurde die Form der Reflexionskurve bei der Reflexion an (200) mit $\text{CuK}\alpha$ -Strahlung mit dem Doppelspektrometer in (1, -1)-Stellung untersucht. Dabei wurde mit dem größten Schmirgel angefangen und zu immer feinerem übergegangen. Tabelle 1 gibt

Tabelle 1

Schmirgel	Halbwertsbreite
120	90 min
240	74 min
300	67 min
Feinschmirgel	33 min

die gemessenen Halbwertsbreiten wieder, Abb. 4 die Reflexionskurven. Die Ordinaten wurden dabei alle auf gleiche Maximalhöhe normiert. Die Ausläufer der Kurven ziehen sich bei allen Linien über einen sehr großen Bereich hin. Das Übergehen in die Horizontale geschieht erst bei einer Breite von 15 bis 20° . Außerdem ist festzustellen, daß die Kurvenform bei den geschliffenen Flächen keineswegs durch eine Normalverteilung angenähert werden darf. Um das deutlich zu machen ist in Abb. 4 eine Normalverteilung mit gleicher Maximalhöhe und Halbwertsbreite wie bei der mit Feinschmirgel erhaltenen Kurve eingetragen. Daß bei allen Schmirgelfeinheiten die gesamte Breite der Kurven mit 15 bis 20° ziemlich constant bleibt, deutet darauf hin, daß diese breiten Ausläufer durch Reflexion in den obersten Schichten des Kristalls entstanden sind. Denn es ist anzunehmen, daß die obersten Schichten bei allen Schmirgelgrößen den gleichen Verwacklungszustand besitzen, da der mechanische Schleifvorgang auch stets derselbe ist. Dieses Ergebnis deckt sich in gewissem Sinne mit dem von RAETHER [3], der durch Reflexion von Elektronenstrahlen feststellte, daß die obersten Schichten beim polierten Kristall eine Verwacklung von ungefähr 15 bis 20° zeigen. Daß die Halbwertsbreite mit abnehmender Korngröße des verwendeten Schmirgels kleiner wird, deutet darauf hin, daß bei feinerem Schmirgel die Störung des Kristallgefüges auf dünnere Schichten der Oberfläche beschränkt ist. Nur so ist es zu verstehen, daß bei gleicher mittlerer Verschwenkung an der Oberfläche, in einer bestimmten wirksamen Tiefe t_v die Verschwenkung bei feiner werdenden Schmirgel immer geringer wird.

Die Bestimmung des integralen Reflexionsvermögens ist bei den geschliffenen Flächen sehr ungenau. Wegen der sehr breiten Kurven sind die Ausläufer der Linien schwer vom Untergrund zu trennen. Die Messungen ergaben nach Gl. (25) für das integrale Reflexionsvermögen einen Wert von $\bar{R} = (25 \pm 5) \cdot 10^{-5}$. Im Rahmen der angegebenen Meßgenauigkeit deckt sich diese Größe mit dem Wert für den vollkommenen Mosaikkristall.

Eine Möglichkeit der direkten Bestimmung der Größe der einzelnen Mosaikblöcke erlaubt das fokussierende Verfahren nach KOCHENDÖRFER [17]. Es ist abgeleitet für ein Kristallpulver mit vollkommen regelloser Orientierung der einzelnen Kristallite. Wie KOCHENDÖRFER angibt, kann das Verfahren aber auch angewendet werden, wenn eine regellose Verteilung nur in einem Orientierungsbereich vorliegt, der größer als der Winkelbereich der physikalischen Breite der Spektrallinien ist. Diese Spektrallinienbreite setzt

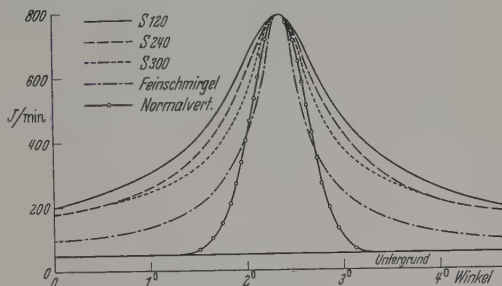


Abb. 4. Reflexionskurven von geschliffenen Kristallen. (Die angegebenen Zahlen beziehen sich auf die Körnung des verwendeten Schmirgels)

sich zusammen aus den Einflüssen der Teilchengröße und der Gitterverzerrung. Eine Trennung dieser Einflüsse ist hier nicht möglich, da dazu Messungen bei verschiedenen Winkeln und damit verschiedenen Eindringtiefen nötig wären. Deshalb wurde die Gitterverzerrung willkürlich im Rahmen dieser Abschätzung vernachlässigt. Abb. 5 zeigt die Anordnung zur Messung der Spektrallinienbreite. Eintrittsblende Bl und Film liegen dabei auf einem Kreis K in dessen Mittelpunkt der Kristall Kr liegt. Die Fokussierungsbedingung ist gegeben bei symmetrischer Reflexion. Die mit dieser Anordnung erhaltenen Spektrallinien wurden photometrisch vermessen und ihre Halbwertsbreite bestimmt. Nach Anbringung verschiedener Korrekturen ergab sich

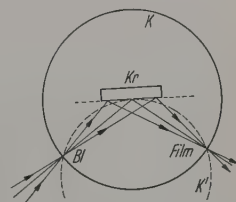


Abb. 5. Anordnung zur Messung der Spektrallinienbreite. Bl Eintrittsblende; K Fokussierungskreis; Kr Kristall

dabei für einen mit Schmirgel 300 geschliffenen Kristall eine Linienbreite von $b = 0,38$ m. Das entspricht einer Teilchengröße $d = 0,095 \mu$. Aus Abb. 1 ist zu entnehmen, daß bei einer Teilchengröße $d = 0,1 \mu = 10^{-5}$ cm keine nennenswerten primäre Extinktion bei der Messung des integralen Reflexionsvermögens zu erwarten ist. Mit diesem Wert für die Teilchengröße läßt sich auch abschätzen, welchen Einfluß die Teilchenverbreiterung auf die Breite der Reflexionskurve hat. Nach JAMES [11] ist die Größenordnung dieser Verbreiterung gegeben durch das Verhältnis Wellenlänge zu Teilchengröße, also

$$2h_T = \frac{\lambda}{d}. \quad (26)$$

Für den vorliegenden Fall mit $\lambda = 1,54 \cdot 10^{-8}$ cm und $d = 10^{-5}$ cm ergibt sich daraus eine Teilchenverbreiterung von $2h_T = 5'$. Vergleicht man diesen Wert mit der für diese Schmirgelgröße gemessenen Halbwertsbreite der Reflexionskurve, $2h = 67'$, erkennt man,

daß die Breite der Reflexionskurven für den geschliffenen Kristall fast ausschließlich auf die Verschwenkung der Kristallite zurückzuführen ist.

2. Polierte Kristalle

Für die Politur der geschliffenen Kristalle wurde reine Naturseide als Untergrund und Polierrot mit einem Zusatz von absolutem Alkohol als Poliermittel verwendet. Als Ausgangsbasis für das Polieren wurden Flächen verwendet, die vorher mit Schmirgel der Körnung 300 geschliffen wurden. Bei größerem Schmirgel dauert das Polieren zu lange, bei feinerem werden die Reflexionskurven sehr schmal, so daß bereits beträchtliche sekundäre Extinktion auftritt. Abb. 6 zeigt eine Reflexionskurve eines polierten Kristalles. Im Gegensatz zu den Kurven, die von den nur geschliffenen

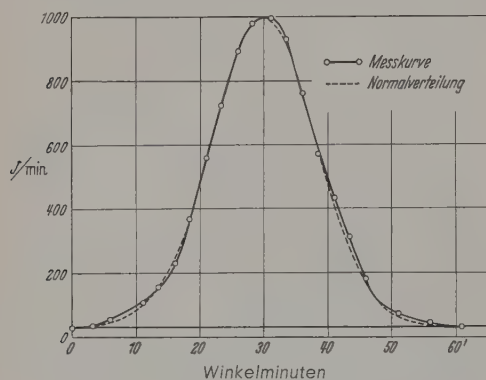


Abb. 6. Reflexionskurve eines einmal polierten Kristalls

Flächen erhalten wurden, ähnelt hier die Form viel mehr einer Gaußschen Normalverteilung. Zum Vergleich ist in Abb. 6 wieder eine Normalverteilung mit gleicher Maximalhöhe und Halbwertsbreite eingetragen. Außerdem ist festzustellen, daß bei der Reflexionskurve des polierten Kristalls die breiten Ausläufer der Linienränder fehlen. Die Gesamtbreite der Linie erstreckt sich nicht über mehr als $1,5^\circ$.

Die Bestimmung von \bar{R} erfolgt nach Gl. (25). Die darin vorkommenden Größen ω , E und I_0 können direkt gemessen werden. Für einen der in Tabelle 2 angegebenen Meßwerte soll das durch ein Zahlenbeispiel erläutert werden. Für die Winkelgeschwindigkeit ω wurde auf Grund der Drehzahl des antreibenden Synchronmotors der Wert $1,87 \cdot 10^{-3} \text{ min}^{-1}$ ermittelt. Die Primärintensität I_0 ergab sich zu $I_0 = 25300 \text{ Imp/min}$, die gesamte von Kristall K_2 reflektierte Leistung (nach Abzug des Linienuntergrundes) zu $E = 3860 \text{ Imp}$.

Tabelle 2

$\bar{R} \cdot 10^5$	$2h'$	$\bar{R} \cdot 10^5$	$2h'$	$\bar{R} \cdot 10^5$	$2h'$	$\bar{R} \cdot 10^5$	$2h'$
28,0	18,4	28,1	19,4	27,7	19,4	28,8	17,6
28,3	18,8	28,4	17,4	28,6	19,0	28,4	18,8
28,5	17,4	28,0	17,5	29,0	19,2	28,3	18,8
28,0	17,4	28,4	18,4	27,7	18,0		

Setzt man diese Werte in Gl. (25) ein, ergibt sich $\bar{R} = 28,3 \cdot 10^{-5}$. Tabelle 2 gibt die so ermittelten Werte des integralen Reflexionsvermögens für eine größere Anzahl von polierten Kristallen wieder.

Für den Mittelwert für \bar{R} errechnet sich

$$\bar{R} = (28,3 \pm 0,2) \cdot 10^{-5}.$$

Für den Mittelwert der Halbwertsbreite $2h$ ergibt sich

$$2h = 18,4'.$$

Berechnet man mit diesem Wert für $2h$ nach (11) die für die sekundäre Extinktion maßgebliche Größe α , so erhält man für diese $\alpha_2 = 123$. Bei bekanntem α kann man den Proportionalitätsfaktor Q aus Gl. (8) ausrechnen, da der Absorptionskoeffizient μ ebenfalls bekannt ist. Er beträgt für $\text{CuK}\alpha$ -Strahlung $\mu = 162 \text{ cm}^{-1}$. Man erhält somit für Q

$$Q_{200} = 9,77 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}.$$

Aus der Theorie ergibt sich dagegen

$$Q_{200}(\text{theor.}) = 9,55 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}.$$

Die Abweichung des Meßwertes vom theoretischen Wert beträgt 2,5%. Diese Abweichung liegt im Rahmen der angegebenen Meßgenauigkeit.

Auch hier wurde die Teilchengröße direkt nach dem fokussierenden Verfahren bestimmt. Dabei ergab sich $d = 0,2 \mu = 2 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$. Es ist allerdings dabei zu beachten, daß dieser Wert für die Teilchengröße sicher nicht für die Oberfläche zutrifft, sondern für eine mittlere Tiefe $t_0 = 6 \mu$. Denn die obersten Schichten von etwa 1μ Dicke beeinflussen die Reflexionseigenschaften für Röntgenstrahlen nach Gl. (20) nur zu etwa 10%.

Eine Teilchengröße von $0,2 \mu$ steht in guter Übereinstimmung mit den Meßergebnissen des integralen Reflexionsvermögens. Denn wie bereits gezeigt wurde, weicht Q nur um 2,5% vom theoretischen Wert des vollkommenen Mosaikkristalls ab, eine Abweichung, die im Rahmen der Meßgenauigkeit liegt. Primäre Extinktion kann demnach nicht auftreten. Nach Abb. 1 bedeutet das, daß die Teilchengröße kleiner als höchstens $0,5 \mu$ sein muß.

Die angegebene Teilchengröße läßt nach (25) auf eine Teilchenverbreiterung von $2h_T = 2,5'$ schließen. Da die Kurven für den polierten Kristall gut durch eine Normalverteilung angenähert werden können, schien es erlaubt zur Berechnung der reinen Verschwenkung die Beziehung (16) zu verwenden, wonach sich die gemessene Halbwertsbreite h ergibt zu

$$h = h_V^2 + h_T^2. \quad (27)$$

Setzt man in diese Beziehung die mittlere Halbwertsbreite aus Tabelle 2 ($2h = 18,4'$) ein, so erhält man mit $2h_T = 2,5'$ für die reine Verschwenkungsverbreiterung $2h_V$ den Zahlenwert:

$$2h_V = 18,2'.$$

Diese Größe weicht um 1% von der gemessenen Halbwertsbreite ab. Bis zu dieser Genauigkeit gibt also die gemessene Kurve die Verschwenkungsfunktion wieder.

3. Mehrmals polierte Kristalle

Andere Werte für den polierten Kristall erhält man wenn man den Kristall häufig poliert. Unter häufigem Polieren soll hier folgendes verstanden werden: Wie beschrieben wurden die Kristalle mit einem Zusatz von absolutem Alkohol poliert. Die beste Politur

urde dabei dann erreicht, wenn der Alkohol gerade noch nicht vollkommen verdunstet war. Vorher sind die Flächen matt, poliert man länger, bekommen sie einen Kratzer. Unter häufigem Polieren soll nun verändert werden, daß die Fläche bis zu dem beschriebenen optimalen Punkt auspoliert und dann das Poliertuch erneut mit Alkohol getränkt wurde. Dann wird der Vorgang von neuem wiederholt.

Abb. 7 stellt die Reflexionskurven für einen mehrmals polierten Kristall dar. Die Primärintensität wurde dabei stets konstant gehalten. Tabelle 3 gibt die Meßwerte für das integrale Reflexionsvermögen und die dazugehörige Halbwertsbreite für den gleichen Kristall wieder.

Man sieht, daß sowohl die Halbwertsbreite, als auch das integrale Reflexionsvermögen bei häufigem Polieren abnimmt. Nach 3- bis 4maligem Polieren ist ein

Tabelle 3

Zahl der Pol.	$\bar{R} \cdot 10^5$	$2h$	$Q \cdot 10^{12}$
1	28,0	22'	9,01
2	25,0	11'	9,02
3	23,0	5,5'	9,19
4	22,4	5,1'	9,04

Endzustand erreicht. In der letzten Spalte von Tabelle 3 ist das jeweilige „spezifische Reflexionsvermögen“ Q dargestellt. Bei der Berechnung von Q nach Gl. (8) ist die sekundäre Extinktion bereits berücksichtigt.

Während \bar{R} von der ersten bis zur vierten Politur um rund 20% abnimmt, beträgt die Abnahme bei Q nur ungefähr 5%. Der größte Teil der Abnahme des integralen Reflexionsvermögens ist demnach auf zunehmende sekundäre Extinktion zurückzuführen. Die noch verbleibende, knapp außerhalb der Fehlergrenze liegende Abnahme von Q dürfte auf eine geringe primäre Extinktion zurückzuführen sein. Für die zweite bis vierte Politur beträgt das Verhältnis $Q_{\text{Exp.}}/Q_{\text{Theor.}} \approx 0,95$. Nach Abb. 1 entnimmt man daraus eine Teilchengröße von etwa $0,5 \mu$ oder $5 \cdot 10^{-5}$ cm. Die auch in diesem Falle durchgeführten direkten Messungen der Teilchengröße nach dem fokussierenden Verfahren ergeben einen Wert von $0,2 \mu$ der durchaus in der gleichen Größenordnung liegt.

4. (400)-Ordnung

Einige polierte Kristalle wurden auch in der (400)-Ordnung untersucht. Zur Messung der Reflexionskurve wurde für die (400)-Ordnung die (2, -2)-Stellung des Doppelkristallspektrometers benutzt. Es sollte vermieden werden, daß durch die Dispersion eine Aufspaltung in die $\text{CuK}\alpha_1$ und $\text{CuK}\alpha_2$ erfolgt, was eine Verbreiterung der Reflexionskurve zur Folge hätte. Bei der Messung des integralen Reflexionsvermögens wurde jedoch die wegen ihrer höheren Intensität leichter zu vermessende (1, -2)-Stellung gewählt, da eine Dispersion in diesem Falle nicht stört.

Tabelle 4

	$\bar{R} \cdot 10^5$	$2h$
(200)	28,0	20'
(400)	4,72	14,2'

Die Halbwertsbreite ist bei der höheren (400)-Ordnung kleiner als bei (200). Bei gleicher mittlerer Verschwenkung müßten sich aber jedesmal die gleichen Werte für die Halbwertsbreite ergeben. Infolge des steileren Einfallwinkels dringt die Röntgenstrahlung bei der (400) Ordnung tiefer in den Kristall ein; die mit Gl. (17) definierte mittlere wirk-

same Tiefe beträgt bei (400) 12μ anstatt 6μ bei (200). Das Abnehmen der Halbwertsbreite bei höherer Ordnung bedeutet demnach ein Abnehmen der mittleren Verschwenkung mit zunehmender Tiefe.

Zusammenfassend ergibt sich folgendes Bild vom Aufbau einer polierten Oberfläche. Das Fehlen der breiten Ausläufer der Reflexionskurven deutet darauf hin, daß der eigentliche Poliervorgang nur die obersten Schichten des Kristalles beeinflusst. Denn nach den Versuchen mit Elektroneninterferenzen von RAETHER zeigen beim polierten Kristall die obersten Schichten eine Verschwenkung von 15 bis 20° , wie es hier beim geschliffenen Kristall festgestellt wurde. Dafür spricht auch, daß häufiges Polieren, welches eine entscheidende Änderung der Halbwertsbreite brachte, keine Veränderung der optischen Qualität der Fläche bringt.

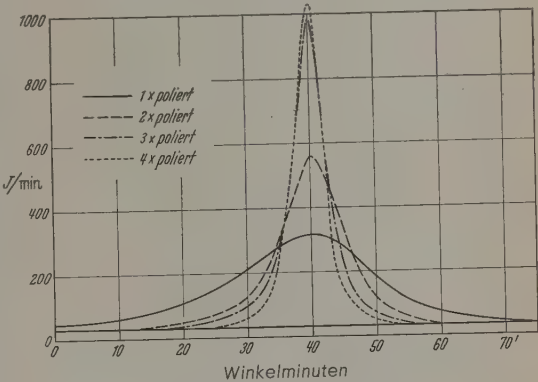


Abb. 7. Reflexionskurven von mehrmals polierten Kristallen

Die unter der Polierschicht liegenden Zonen des Kristalls besitzen eine mit der Tiefe abnehmende Verschwenkung der Mosaikblöcke. Bei diesen tiefer liegenden Schichten ist nach der ersten Politur kein wesentlicher Unterschied gegenüber der mit Feinschmirgel geschliffenen Fläche zu verzeichnen. Die Halbwertsbreite der Verschwenkung beträgt mit 20 bis $25'$ ungefähr die Hälfte von der bei geschliffenen Flächen, die Größe der einzelnen Mosaikblöcke mit $0,2 \mu$ ungefähr das Doppelte. Erst bei häufigem Polieren nimmt die mittlere Verschwenkung ab auf ungefähr $5'$, ohne daß sich dabei die Teilchengröße noch wesentlich ändert. Der Gedanke liegt nahe, daß durch das häufige Polieren die vom vorhergehenden Schleifen gestörte Schicht allmählich abgetragen und der darunterliegende ungestörte Mutterkristall freigelegt wird. Der Übergang von der kristallographisch stark gestörten Polierschicht zum ungestörten Mutterkristall beschränkt sich auf einen immer schmäleren Bereich.

5. Einfluß der Wärmebehandlung

Um die verschiedentlich erwähnte Rekristallisation studieren zu können, wurden die polierten Kristalle systematisch bei verschiedenen Temperaturen verschieden lang getempert. Ein kleiner Simon-Müller-Ofen, in dem die Temperatur auf $\pm 5^\circ$ konstant gehalten werden konnte, stand für die Temperung zur Verfügung. Als Temperzeit wurde die Spanne definiert vom ersten Abschalten der Heizung bis zum endgültigen Abschalten.

15 Kristalle, deren integrales Reflexionsvermögen und Halbwertsbreite unmittelbar nach dem Polieren ermittelt wurde und in Tabelle 2 wiedergegeben ist, wurden bei verschiedenen Temperaturen und Zeiten getempert. Tabelle 5 gibt die Halbwertsbreiten vor und nach dem Tempern sowie das integrale Reflexionsvermögen wieder. In der letzten Spalte von Tabelle 5 ist das Verhältnis des spezifischen Reflexionsvermögens Q nach dem Tempern (bei Berücksichtigung

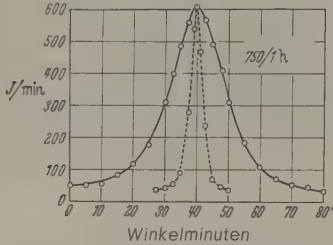


Abb. 8. Reflexionskurven eines einmal polierten Kristalles vor und nach dem Tempern bei 750°C/1 h

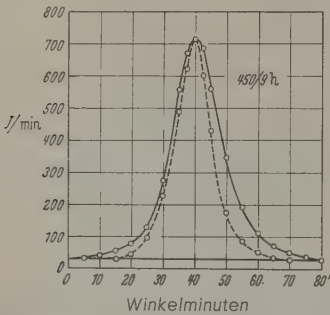


Abb. 9. Reflexionskurve eines einmal polierten Kristalles vor und nach dem Tempern bei 450°C/9 h

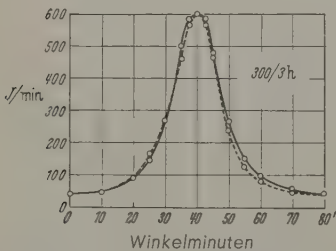


Abb. 10. Reflexionskurven eines einmal polierten Kristalles vor und nach dem Tempern bei 300°C/3 h

der sekundären Extinktion) zum Mittelwert von Q_0 bei den ungetemperten polierten Kristallen dargestellt.

Die Werte der Halbwertsbreite wurden dabei bereits nach Gl. (23) in bezug auf die Winkeldivergenz des Primärstrahles korrigiert.

Im allgemeinen hat sowohl die Tempertemperatur als auch die Temperzeit einen Einfluß auf die Veränderung der Halbwertsbreite. Die stärksten Änderungen der Halbwertsbreite traten bei Temperaturen über 675°C auf. Abb. 8 zeigt die Reflexionskurve vor und nach dem Tempern bei 750°C/1 h. Während bei 675°C noch eine Abhängigkeit von der Zeit feststellbar ist, wurde bei 750°C die maximale Änderung der Halbwertszeit bereits nach einer Stunde Temperzeit erreicht. Im Gebiet zwischen 450° und 675°C ist nur

noch eine schwache Änderung der Halbwertsbreite feststellbar (Abb. 9). Unterhalb 450°C ist kein nennenswerter Effekt zu erzielen (Abb. 10).

Ähnliche Verhältnisse liegen beim integralen Reflexionsvermögen vor. Bei 675°C/9 h, 750°C/1 h, 750°C/3 h und 750°C/9 h nimmt \bar{R} beim Tempern auf die Hälfte bis ein Drittel des ursprünglichen Wertes ab. Unterhalb 450°C ändert sich auch das Reflexionsvermögen, genauso wie die Halbwertsbreite beim Tempern nicht mehr. Bei den dazwischenliegenden Temperaturen ist in den meisten Fällen eine geringe Abnahme des Reflexionsvermögens festzustellen. Diese Abnahme wird zum Teil auf primäre und zum Teil auf sekundäre Extinktion zurückzuführen sein.

Tabelle 5

Temperatur °C	Temperzeit h	Halbwertsbreite vor dem Tempern 2 h (min)	Halbwertsbreite nach dem Tempern 2 h (min)	Integrales Reflexionsvermögen nach dem Tempern $\bar{R} \cdot 10^4$	Q/Q_0
300	1	18,8	17,6	28,2	1,03
300	3	17,4	17,4	28,4	1,02
300	9	19,5	19,8	28,3	1,00
450	1	18,8	15,0	26,2	0,95
450	3	19,4	17,4	25,5	0,91
450	9	17,4	12,6	26,9	0,99
600	1	17,6	17,4	28,7	1,03
600	3	18,0	11,2	23,9	0,88
600	9	17,4	11,4	26,1	0,97
675	1	18,4	12,4	24,3	0,89
675	3	19,2	6,8	20,6	0,79
675	9	18,8	4,2	12,6	0,49
750	1	17,5	3,7	12,4	0,48
750	3	19,0	3,0	11,1	0,48
750	9	18,4	4,8	9,5	0,33

Der Einfluß der sekundären Extinktion läßt sich bei bekannter Halbwertsbreite nach Gl. (11) bzw. (14) angeben. In der letzten Spalte von Tabelle 5 ist die sekundäre Extinktion bereits berücksichtigt. Die noch bleibende Abweichung der Größe Q/Q_0 von 1 kann als Maß für die auftretende primäre Extinktion gelten. Sie ist jedoch mit Ausnahme der letzten vier Werte so gering, daß sie gerade an der Grenze der Meßgenauigkeit liegt. Eine grobe Abschätzung der Teilchengröße ergibt, daß diese bei gerade einsetzender primärer Extinktion in der Größenordnung von 0,5 μ liegen muß. Das gilt für die bei Temperaturen zwischen 450° und 675°C getemperten Kristalle. Bei den bei hohen Temperaturen getemperten Kristallen ist jedoch mit Sicherheit starke primäre Extinktion vorhanden. Das spezifische Reflexionsvermögen beträgt hier nur 35 bis 50% von dem bei einem vollkommenen Mosaikkristall zu erwartenden. Das entspricht nach der Korrektionsformel (6) und Abb. 1 einer Teilchengröße von etwa 4 μ . Die Korrektionsformel (6) ist allerdings nicht bis zu beliebig großen Werten der primären Extinktion verwendbar. Für unendlich große Teilchen geht nämlich der Faktor $\frac{\bar{R}(p \cdot q)}{p \cdot q}$ gegen Null. Die Korrektionsformel stellt also keinen stetigen Übergang vom Mosaikkristall zum Idealkristall dar. Aus diesem Grund ist es erforderlich, das Reflexionsvermögen für diese kritischen Fälle auch in höherer Ordnung zu messen. Bei dieser ist das spezifische Reflexionsvermögen Q und damit auch die primäre Extinktion

mer. In Tabelle 6 sind als Beispiel die Meßwerte den bei 750° C/3 h getemperten Kristall wiederzulegen. Zum Vergleich sind in Tabelle 6 nochmals entsprechenden Werte für einen einmal polierten Kristall aufgeführt.

Behandlung	200		400		600	
	2 h	R · 10 ⁶	2 h	R · 10 ⁶	2 h	R · 10 ⁶
mal poliert . . .	20'	28,0	14,2'	4,72	—	1,8
°C/3h getempert	2,7'	11,1	2,1'	3,74	—	1,6 ₄

Für den polierten ungetemperten Kristall und Reflexion an (400) errechnet sich nach Gl. (8) mit $=160$ [ermittelt nach (14)] der Wert

$$Q_{400 \text{ ungetemp.}} = 1,55 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}.$$

Für den getemperten Kristall ergibt sich analog mit $=1070$ der Wert

$$Q_{400 \text{ getemp.}} = 1,32 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-1}.$$

damit erhält man für das Verhältnis

$$\frac{Q_{\text{getemp.}}}{Q_{\text{ungetemp.}}} = \frac{\mathfrak{Z}_g(p \cdot q)}{p \cdot q} = \frac{1,32 \cdot 10^{-2}}{1,55 \cdot 10^{-2}} = 0,85.$$

Für $\frac{\mathfrak{Z}_g(p \cdot q)}{p \cdot q} = 0,85$ entnimmt man aus Abb. 1 eine Teilchengröße von etwa 4 μ .

Ebenso kann man die Auswertung für die Reflexion an (600) durchführen. In diesem Fall wurde die Halbwertsbreite infolge der geringen Intensität nicht mehr bestimmt [man müßte in (3, -3) Stellung des Spektrometers messen], sondern die Zahlenwerte von der Messung an (400) übernommen. Das erscheint gerechtfertigt, da die sekundäre Extinktion nach Gl. (8) proportional Q ist und demnach hier nur eine Korrekturgröße zweiter Ordnung darstellt. Man erhält

$$Q_{600 \text{ ungetemp.}} = 5,8 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$$
$$Q_{600 \text{ getemp.}} = 5,5 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}.$$

Das Verhältnis $Q_{\text{getemp.}}/Q_{\text{ungetemp.}}$ wird damit 0,94. Für dieses Verhältnis ergibt sich eine Teilchengröße $d = 7 \mu$. Im Rahmen der Meßgenauigkeit stimmen die bei den drei Ordnungen erhaltenen Werte für die Teilchengröße gut überein. Dabei ist allerdings zu beachten, daß bei den verschiedenen Ordnungen auch die Eindringtiefe der Röntgenstrahlen verschieden ist. Vermutlich ergibt sich daher die Teilchengröße bei der (600) Ordnung mit der größten Eindringtiefe auch etwas größer als bei den anderen Ordnungen.

Es wurde auch bei den getemperten Kristallen versucht, die Teilchengröße nach dem fokussierenden Verfahren zu bestimmen. Die auf diese Weise bei den bei 750° getemperten Kristallen erhaltene Spektrallinienbreite von $b = 0,19 \text{ mm}$ müßte aber ausschließlich auf die verbreiternde Wirkung der Eintrittsblende zurückgeführt werden. Die Teilchengröße überschreitet also den mit diesem Verfahren noch meßbaren Wert. Grundsätzlich liegt die Grenze dieses fokussierenden Verfahrens in der natürlichen Spektrallinienbreite. Diese Grenze liegt bei Verwendung von Kupferstrahlung und Steinsalz bei 0,6 μ . Daß die Teilchengröße bei den bei hoher Temperatur getem-

perten Kristallen mit diesen Verfahren nicht mehr meßbar ist, deckt sich gut mit dem am Spektrometer erhaltenen Werten. Dort wurde die Teilchengröße zu 5 bis 7 μ ermittelt.

Infolge dieses hohen Wertes für die Teilchengröße ist auch bei den getemperten Kristallen der Anteil von Teilchenverbreiterung an den gemessenen Reflexionskurven gering. Die Reflexionskurven stellen auch hier im wesentlichen die Verschwenkungsfunktion der Mosaikblöcke dar.

Die gesamten, durch Tempern erzielten Veränderungen der Halbwertsbreite und des Reflexionsvermögens sind in den Abb. 11 und 12 graphisch dargestellt.

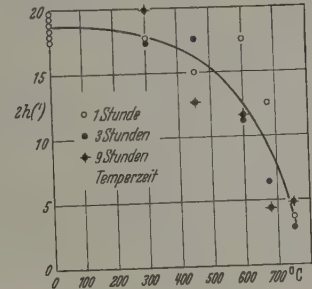


Abb. 11. Änderung der Halbwertsbreite der Reflexionskurven in Abhängigkeit von der Temperatempertemperatur

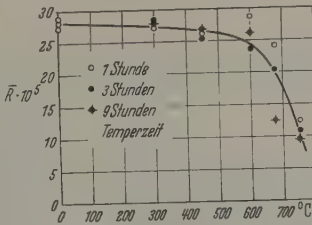


Abb. 12. Änderung des integralen Reflexionsvermögens in Abhängigkeit von der Temperatempertemperatur

Abschließend sei nur kurz darauf hingewiesen, daß bei dem Tempervorgang meßbare Mengen von Steinsalz von der bearbeiteten Oberfläche abdampfen. So ergaben informatorische Untersuchungen, daß z. B. bei 750° C und einer Stunde Temperzeit eine Schichtdicke von etwa 4 μ wegdampft. Es besteht durchaus die Möglichkeit, daß bei den höheren Temperatempertemperaturen der Abdampfprozeß einen erheblichen Einfluß auf die endgültige Struktur der Oberfläche hat. Die Abdampfmessungen bedürfen aber noch der genaueren Nachprüfung, die in Kürze vorgenommen werden soll.

Zusammenfassung

An verschieden behandelten (100) NaCl-Oberflächen wurde das integrale Reflexionsvermögen für Cu K α -Strahlung sowie die Form der Reflexionskurven gemessen. Aus diesen Meßwerten wurden Aussagen über die Größe der einzelnen kohärenten Gitterbereiche und ihre mittlere Verschwenkung in bezug auf die kristallographische Haupttrichtung gewonnen. Bei Annahme einer Normalverteilung für die Verschwenkung der einzelnen Blöcke um ihren Mittelwert besteht ein einfacher Zusammenhang zwischen der Breite der Reflexionskurven und der sekundären Extinktion.

Dieser Zusammenhang gilt auch, wenn die Breite der Reflexionskurven nicht allein durch die Verschwenkung, sondern auch durch die Teilchengröße bestimmt wird. Bei bekannter sekundärer Extinktion kann man die primäre Extinktion berechnen und aus ihr eine Abschätzung der Teilchengröße vornehmen. Die untere Grenze für die so bestimmbare Teilchengröße liegt bei $2 \cdot 10^{-5}$ cm.

Auf Grund des Eindringvermögens der Röntgenstrahlen wurde eine mittlere wirksame Tiefe angegeben, auf die sich die erhaltenen Ergebnisse beziehen. Sie beträgt je nach der Reflexionsordnung 6 bis 18 μ .

Bei geschliffenen Flächen besitzen die obersten Schichten eine Verschwenkung von 15 bis 20°. Die Größe der kohärenten Gitterbereiche beträgt ungefähr $1 \cdot 10^{-5}$ cm.

Polierte Flächen sind in ihrem Aufbau verschieden, je nach dem ob sie nur einmal oder häufiger poliert worden sind. Die gesamte Breite der Reflexionskurven erstreckt sich hier in keinem Fall über mehr als 1,5°. Die mittlere Verschwenkung in einer Tiefe zwischen 1 und 10 μ beträgt etwa 25' bei einem einmal polierten Kristall und nimmt bei häufigem Polieren ab auf etwa 5'. Die mittlere Teilchengröße in der angegebenen Tiefe nimmt bei häufigem Polieren von $2 \cdot 10^{-5}$ cm auf $5 \cdot 10^{-5}$ cm zu.

Beim Tempern von polierten Kristallen bei 750°C nimmt die mittlere Verschwenkung von ursprünglich 25' auf 2 bis 4' ab und die Teilchengröße von $2 \cdot 10^{-5}$ cm auf $5 \cdot 10^{-4}$ cm zu. Bei Temperaturen zwischen 450 und 750°C sind durch Tempern nur geringe Änderungen zu erzielen, unterhalb 450°C keine mehr.

Literatur: [1] READ jr., W.T.: Dislocations in Crystals. New York: McGraw-Hill Book Comp. 1953. — [2] SHOCKLEY, W.: Imperfections in Nearly Perfect Crystals. New York: John Wiley & Sons 1952. — [3] RAETHER, H.: Optik 1, Nr. 4 (1946). — [4] BRAGG, W.L., R.W. JAMES and C.H. BOSANQUET: Phil. Mag. 42, 1 (1921). — [5] SAKISAKA, Y.: Proc. Phys.-Math. Soc. Japan 12, 189 (1930). — [6] ASSELMAYER, F.: Diss. München 1941. — [7] ASSELMAYER, F., u. H. RIEDEL: Z. angew. Phys. 11, 114 (1959). — [8] DARWIN, C.G.: Phil. Mag. 27, 315 (1914). — [9] DARWIN, C.G.: Phil. Mag. 43, 800 (1922). — [10] RENNIGER, M.: Z. Kristallogr. 89, 344 (1934). — [11] JAMES, R.W.: The Optical Principles of the Diffraction of X-rays, p. 282. London: G. Bell and Sons LTD 1950. — [12] JAMES, R.W.: The Optical Principles of the Diffraction of X-rays, p. 536. London: G. Bell and Sons LTD 1950. — [13] EHRENBERG, W., u. H. MARK: Z. Physik 42, 807 (1927). — [14] JAMES, R.W.: The Optical Principles of the Diffraction of X-rays, p. 306. London: G. Bell and Sons LTD 1950. — [15] SANDSTRÖM, A.E.: Handbuch der Physik, Bd. 30. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1957. — [16] SCHWARZSCHILD, M.M.: Phys. Rev. 32, 162 (1928). — [17] KOCHENDORFER, A.: Z. Kristallogr. 105, 330 (1944).

Prof. Dr.-Ing. FRITZ ASSELMAYER
und Dipl.-Phys. WALTER BIENERT,
Physikalisches Institut Weihenstephan
der Technischen Hochschule München

Experimente über den Einfluß struktureller Oberflächenfehlstellen auf die Entwickelbarkeit und Lichtempfindlichkeit von Halogensilber-Einkristallen

Von EBERHARD KLEIN und REINHARD MATEJEC

Mit 17 Textabbildungen

(Eingegangen am 10. Oktober 1959)

I. Vorbemerkungen

Wenn man große, aus der Schmelze gezüchtete Halogensilberkristalle mit komplexbildenden Lösungen (Br^- , Cl^- , $\text{S}_2\text{O}_8^{2-}$, SO_3^{2-} oder SCN^-) in Berührung bringt, so werden sie an ihrer Oberfläche angelöst: In der Komplexlösung ist eine sehr kleine Ag^+ -Konzentration vorhanden, das Löslichkeitsprodukt des Halogensilbers ist unterschritten, infolgedessen geht Halogensilber von der Kristalloberfläche weg in Lösung.

Die Kinetik der Komplexbildung regelt die Lösungsgeschwindigkeit und infolgedessen auch die Entfernung des Systems vom Gleichgewichtszustand (vgl. [1]). Bei sehr raschem Anlösen erfolgt der Kristallabbau bevorzugt an strukturellen Gitterfehlstellen [2], [3], man erhält dann an der Kristalloberfläche mehr oder weniger zerklüftete Ätzgruben (siehe Abschnitt II). Erfolgt die Komplexbildung und damit auch das Anlösen dagegen sehr langsam, so können sich schon während des Anlösens Gleichgewichtszustände zwischen der Kristalloberfläche und der Lösung annähern, die zerklüfteten Ätzgruben „heilen aus“ (s. Abschnitt III). Die Art und die Konzentration des Komplexbildners bestimmen aus diesem Grunde die Form der entstehenden Ätzgruben.

Um die Ätzgruben in ihrer ursprünglichen Form zu erhalten, ist es infolgedessen auch notwendig, den

Anlösevorgang sehr rasch abzubrechen, indem man die komplexbildende Lösung entfernt und anhaftende, restliche Spuren des Komplexbildners durch rasches, starkes Verdünnen und Abspülen mit reinem Wasser schnell ausschaltet. Es ist hierzu noch zu bemerken, daß unter Umständen beim Abbrechen des Anlösevorgangs durch das Verdünnen Silberhalogenid oder Silbersalz des Komplexbildners an der Kristalloberfläche abgeschieden wird und daß auf diese Weise die Gestalt der Ätzgruben verfälscht wird. Man erkennt diese Störung, indem man die glatte Halogensilberoberfläche kurz in eine Komplexlösung taucht, die an Halogensilber gesättigt ist, und dann diese Lösung rasch verdünnt (s. Abschnitt VI). Solche Störungen waren besonders beim Ätzen mit SCN^- -Lösung zu beobachten, sie treten dort so stark auf, daß die Form der durch SCN^- entstehenden Ätzgruben nur in wenigen Fällen zu erfassen war. Alle Untersuchungen wurden vorwiegend an 100-Flächen durchgeführt; die kristallographische Orientierung der Kristalle wurde bestimmt durch Röntgen-Rückstrahl-Interferenzen.

II. Die Form der Ätzgruben

Die Abb. 1–3 zeigen die charakteristischen Formen der Ätzgruben, welche erhalten werden beim Ätzen von AgBr -100-Flächen mit je 2 n wäßriger Lösung von Na_2SO_3 , KBr und $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$. Während

beim Ätzen dieser AgBr-Flächen mit Na_2SO_3 stark zerklüftete Ätzgruben erhält, welche den Kristallabbau in kristallographischer Orientierung erkennen lassen (s. Abb. 1), führt die Ätzung mit $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$ in der Regel zu sehr sanften Mulden (s. Abb. 3), während die Ätzung mit KBr zu Ätzgruben führt (s. Abb. 2, linkes Teilbild), deren Form zwischen der mit $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$ und der mit Na_2SO_3 erhaltenen liegt. Die Abb. 4 zeigt Ätzgruben, welche durch Ätzung mit KBr-Lösung an einer AgBr-111-Fläche erhalten wurden. Die 111-Fläche wird hier beim Ätzen parallel verlaufen, auf diese Weise bilden sich würfelförmige Ätzgruben.

Beim AgCl erhält man an 100-Flächen im allgemeinen nur im Ätzen mit NaCl-Lösung ausgeprägte Ätzgruben (s. Abb. 5), während die Ätzung mit Na_2SO_3 und mit $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$ zu den gleichen flachen Mulden führt wie bei $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$ -Ätzung von AgBr-100-Flächen (vgl. Abb. 3). In der Abb. 5 sind im Stereobild außer den rechteckigen Ätzgruben auch noch stäbchenförmige AgCl-Abscheidungen zu erkennen; diese AgCl-Stäbchen haben sich beim Abbruch der Ätzung aus der übersättigten Lösung am AgCl niedergeschlagen (vgl. Abschnitt VI).

III. Das „Ausheilen“ von Ätzgruben

Die Abb. 2 zeigt im linken Teilbild Ätzgruben, welche auf einer 100-AgBr-Oberfläche durch Ätzung mit KBr-Lösung erhalten wurden. Wenn man diese

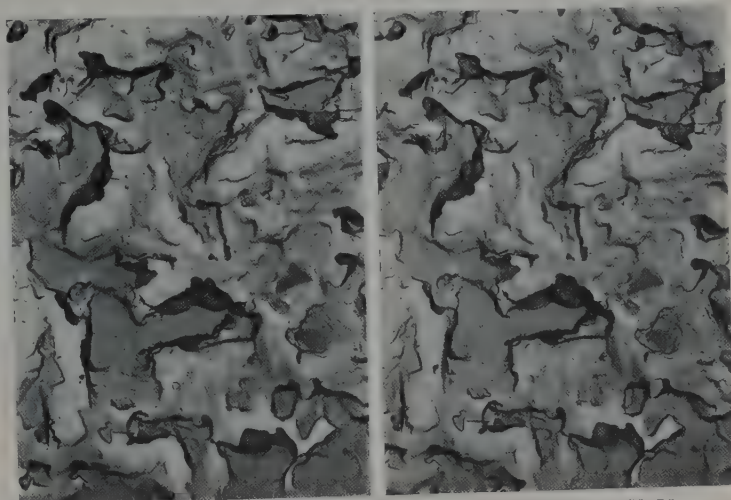


Abb. 1. Ätzgruben an einer 100-Fläche von AgBr nach 1 min Ätzung in 2n Na_2SO_3 -Lösung. Elektronenmikroskopische Stereo-Aufnahme, Kohleabdruck (6600 \times)

Kristalloberfläche nach dem Anätzen mehrere Stunden lang mit einer KBr-Lösung in Kontakt bringt, welche an AgBr gesättigt ist, dann „heilen“ die Ätzgruben aus. Man erhält nach dem „Ausheilen“ wieder eine fast glatte Kristalloberfläche, wie sie das rechte

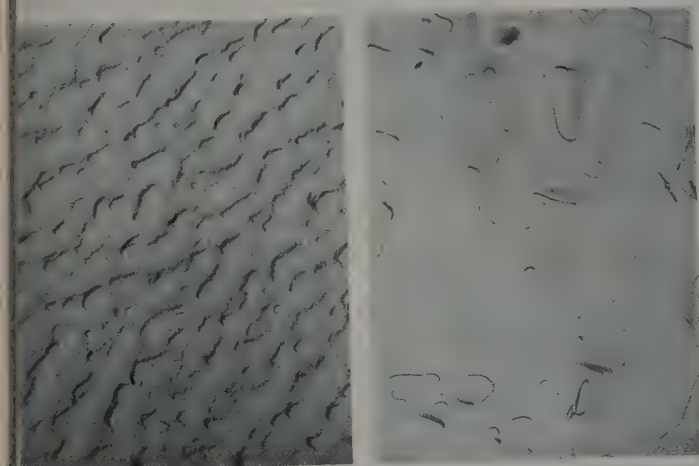


Abb. 2. Linkes Teilbild: Ätzgruben an einer 100-Fläche von AgBr nach 1 min Ätzung in 2n KBr-Lösung. Rechtes Teilbild: Die gleiche Fläche, nach dem Ätzen mehrere Stunden mit gesättigter (KBr + AgBr)-Lösung behandelt; Ätzgruben wurden dabei „ausgeheilt“. Elektronenmikroskopische Aufnahmen, Kohleabdruck (6600 \times)

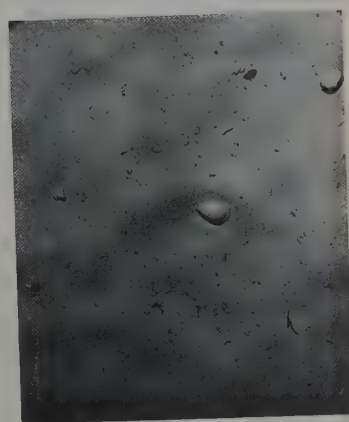


Abb. 3. Ätzgruben an einer 100-Fläche von AgBr nach 1 min Ätzung in 2n $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$ -Lösung. Elektronenmikroskopische Aufnahme, Kohleabdruck (6600 \times)

Außer von der Art, Konzentration und Temperatur des Komplexbildners sowie von Halogensilbersorte und Ätzdauer hängt die Form der Ätzgruben auch noch etwas von der individuellen Beschaffenheit der untersuchten Kristalloberfläche ab; die in den Abb. 1–5 gezeigten Ätzgrubenformen sind deshalb nicht immer genau reproduzierbar zu erhalten, sie wurden als sehr oft auftretende Standard-Typen aus einer sehr großen Zahl elektronenmikroskopischer Aufnahmen ausgesucht.

Teilbild der Abb. 2 wiedergibt. Dieses Versuchsergebnis beweist, daß zwischen den Ag- und den Halogenionen an der Kristalloberfläche einerseits und den gleichen Ionen der Lösungsphase andererseits ein dynamisches Gleichgewicht besteht (s. auch [4]): Nach der Ätzung befindet sich die stark gestörte Kristalloberfläche in einem Nicht-Gleichgewichtszustand. Wird die Kristalloberfläche dann mit der an AgBr gesättigten KBr-Lösung in Kontakt gebracht,

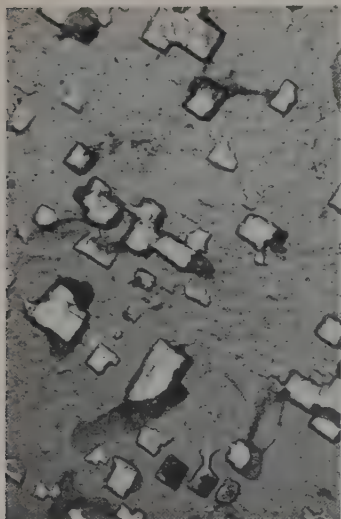


Abb. 4

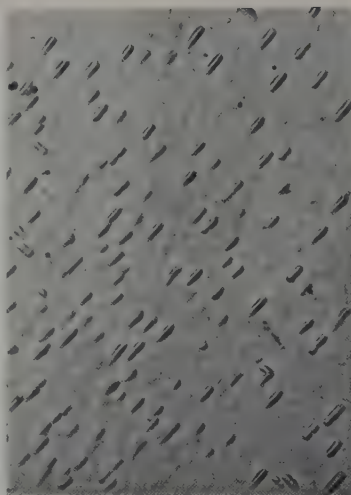


Abb. 5

Abb. 4. Ätzgruben an einer 111-Fläche von AgBr nach 1 min Ätzung in 2n KBr-Lösung. Elektronenmikroskopische Aufnahme, Kohleabdruck (6600 \times).
Abb. 5. Stäbchenförmige Abscheidung von AgCl neben den Ätzgruben (NaCl-Ätzung) auf AgCl. Elektronenmikroskopische Stereo-Aufnahme, Kohleabdruck (13000 \times).

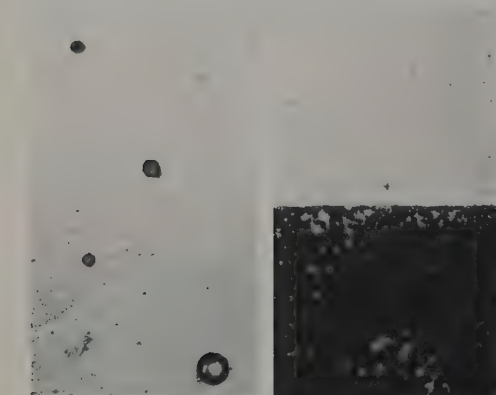


Abb. 6. Bevorzugte Photolyse im geätzten Bereich einer AgBr-100-Fläche bei Bestrahlung in Luft (Lichtmikroskopische Aufnahme). Linkes Teilbild: Grenze (ungeätzt/geätzt mit KBr-Lösung) vor der Photolyse. Rechtes Teilbild: Die gleiche Grenze nach der Photolyse.

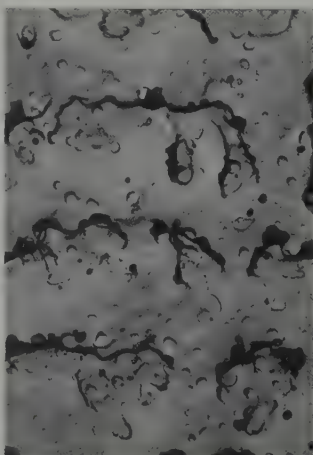
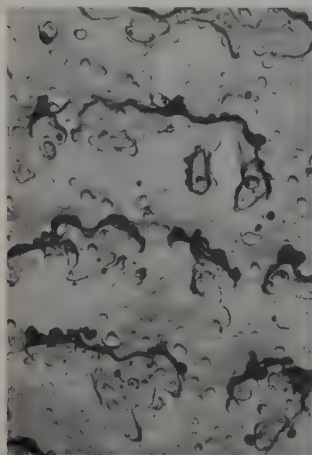


Abb. 7. Beginn der Photolyse an den Steilhängen der Ätzgruben; AgBr-100-Fläche, 1 min mit 2n KBr-Lösung geätzt, dann Photolyse. Elektronenmikroskopische Stereo-Aufnahme, Kohleabdruck (13000 \times).

so scheiden sich aus dieser Lösung Ag-Ionen und Halogenionen an bestimmten Stellen ab, wo sie besonders fest gebunden werden, während gleichzeitig Ag-Ionen und Halogenionen von bestimmten Stellen der Kristalloberfläche, wo diese Ionen nur sehr locker sitzen, in die Lösung hineingehen. Die Ätzgruben verschwinden langsam infolge dieses dynamischen Gleichgewichts.

Das „Ausheilen“ der Ätzgruben wird durch den Zusatz von AgSCN-Spuren zu der an AgBr gesättigten KBr-Lösung sehr gefördert. Vermutlich beschleunigen diese Spuren die Komplexbildung und den Komplexzerfall [5].

IV. Photolyse

Wenn man eine partiell angeätzte Halogensilber-kristalloberfläche an Luft (z.B. mit Quecksilberlicht) bestrahlt, dann erkennt man deutlich, daß im geätzten Bereich der Kristalloberfläche die Photolyse viel

stärker abläuft als im ungeätzten Bereich (s. Abb. 6). Als besonders lichtempfindlich erweisen sich an den 100-Oberflächen die Steilhänge der Ätzgruben: Die elektronenmikroskopischen Stereoaufnahmen (siehe z.B. Abb. 7) zeigen, daß die Photolyse (meist unter Silberfadenbildung) an diesen Steilhängen beginnt. Dort befinden sich offenbar diejenigen strukturellen Oberflächenfehlstellen, an denen die Photolyse bevorzugt abläuft. Wird die Photolyse nicht in Luft, sondern unter Wasser durchgeführt, so tritt der Unterschied zwischen geätztem und ungeätztem Oberflächenbereich fast nicht mehr in Erscheinung.

Die Abb. 8 zeigt eine ursprünglich glatte AgBr-100-Oberfläche, die ohne vorhergehende Ätzung unter Wasser bestrahlt wurde. Im Stereobild erkennt man, wie sich dicke Silberfäden steil nach oben aus der Kristalloberfläche herauschieben,

während an der Kristalloberfläche die Photolyse „Ätzgruben“ entstehen. Der Mechanismus der Grubenbildung durch Photolyse im Wasser ist wahrscheinlich folgender: Es wandern fehlgeordnete Silberionen aus bestimmten, strukturell gestörten Oberflächenbereichen durch den Kristall hinreichend zu den Fußpunkten der photolytischen Silberfäden und werden dort durch Photoelektronen Silberatomen reduziert; gleichzeitig gehen aus diesen Oberflächenbereichen Halogenionen in das Wasser in Lösung. Während die photolytischen Silberfäden aus der Kristalloberfläche herauswachsen, bilden sich also (offenbar nach dem gleichen Mechanismus wie bei der chemischen Entwicklung [6]) an der Kristalloberfläche Ätzgruben. Die Defektelektronen

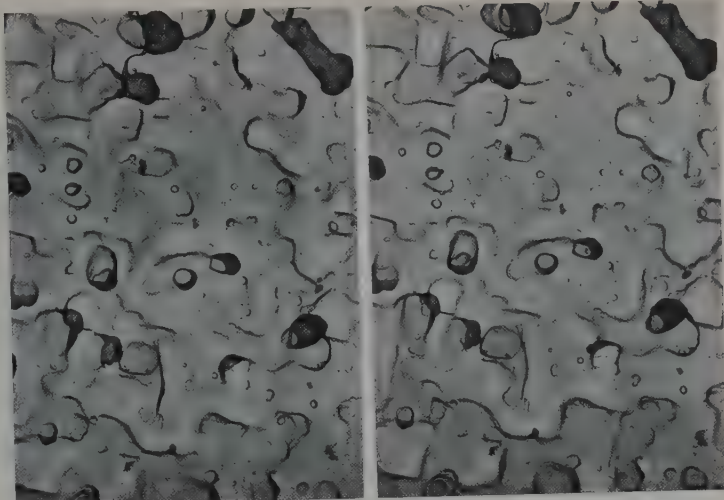


Abb. 8. Photolyse unter Wasser an einer ursprünglich glatten, ungeätzten 100-AgBr-Fläche. Bildung von dicken Silberfäden und von Ätzgruben durch die Photolyse. Elektronenmikroskopische Stereoaufnahme, Halogensilber und Silber aus der Kohlehülle ausgelöst (13000×)



Abb. 9. Entwickelbarkeit von Ätzstellen. Linkes Teilbild: Grenze (ungeätzt/geätzt mit KBr-Lösung) vor der Entwicklung. Rechtes Teilbild: Die gleiche Grenze nach der Entwicklung. Lichtmikroskopische Aufnahmen (100×)

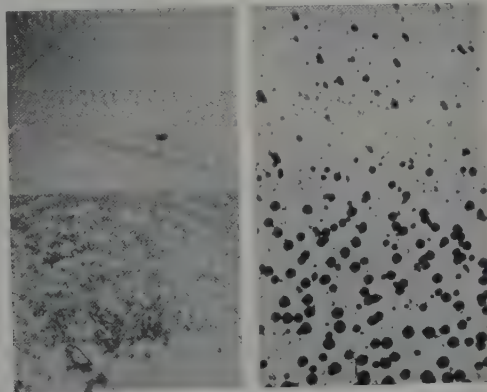


Abb. 10. Unterdrücken der Entwickelbarkeit von Ätzstellen durch Gelatinezusatz. Linkes Teilbild: Grenze (ungeätzt/geätzt mit KBr-Lösung) vor der Entwicklung. Rechtes Teilbild: Die gleiche Grenze, mit Gelatinelösung behandelt und dann entwickelt. Lichtmikroskopische Aufnahmen (100×)

verlassen auch den Kristall, jedoch an beliebigen Stellen. An Ätzgruben läuft die Photolyse um Größenordnungen schneller ab als im ungestörten Kristallbereich (Abb. 7). In Luft bilden sich durch Photolyse aber schwieriger Ätzgruben als im Wasser. Wahrscheinlich ist das der Grund, weshalb in Luft (im Gegensatz zu Wasser) eine rasche Photolyse nur an vorgeätzten Kristallbereichen beobachtet wird.

Die starke Beschleunigung der Photolyse durch die an den Ätzgruben befindlichen Oberflächenstörstellen könnte darauf zurückzuführen sein, daß sich an diesen Stellen Zwischengittersilberionen mit großer Geschwindigkeit bilden können und daß deshalb diese strukturellen Störstellen den hohen

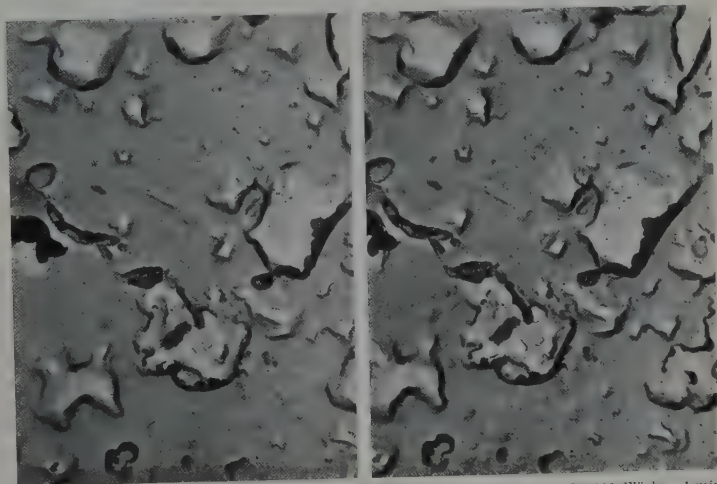


Abb. 11. Beginn der Entwicklung an den Steilhängen der Ätzgruben; AgBr-111-Fläche, 1 min mit 2n KBr-Lösung geätzt, dann alle Silberkeime durch Bromieren zerstört, danach entwickelt. Elektronenmikroskopische Stereoaufnahme, Kohleabdruck (13000×)

Ag_0^+ -Bedarf während der Photolyse in verhältnismäßig kurzer Zeit decken (vgl. auch [8]).

Trifft diese Vermutung zu, dann entstehen bei der Belichtung auf indirektem Wege über die leicht Ag_0^+ -

Teilbild die Grenze zwischen einem ungeätzten und einem 1 min lang in 2 n KBr-Lösung geätztem AgBr -Kristallbereich. Wird der partiell angeätzte Kristall zur Zerstörung sämtlicher Silberkeime zunächst

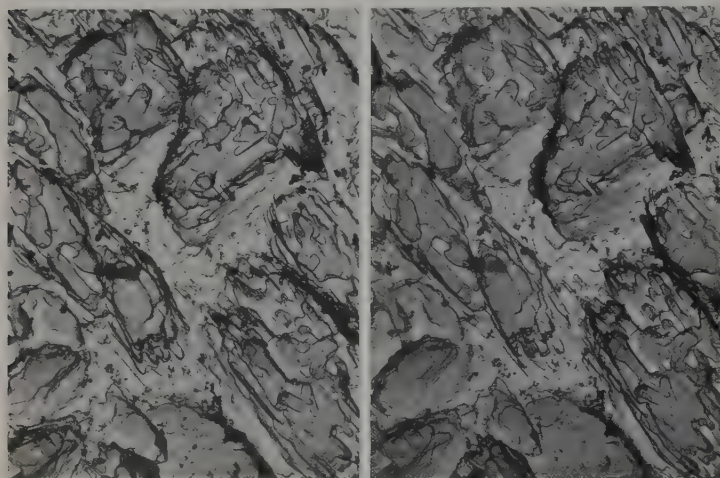


Abb. 12. Stäbchenförmige Abscheidung von AgSCN auf AgCl neben den Ätzgruben (KSCN -Ätzung) auf einer AgCl -100-Fläche. Elektronenmikroskopische Stereo-Aufnahme, Kohleabdruck (6600 \times)

liefernden Ätzgruben auch Ag_0^+ -Ionen. Bei kleinen Belichtungen dürfte aber die Quantenausbeute dieser Ag_0^+ -Bildung verschwindend klein sein; erst dann,

„fusionshemmung“ die mit Gelatine behandelten Kristalle wesentlich länger entwickelt als die nicht behandelten, bilden sich im geätzten Kristallbereich zwar größere, aber weniger Silberteilchen (vgl. die rechten Teilbilder der Abb. 9 und 10).

Die Entwickelbarkeit von Ätzstellen spielt offenbar auch bei der praktischen Entwicklung von Halogensilberkörnern eine Rolle: Bei einer energischen „chemischen“ Entwicklung bilden sich an den Emulsionskörnern stets viel mehr Silberfäden als Silberkeime nach einer gewissen Belichtung am Korn überhaupt anwesend sein können [7]. Offenbar setzt unter diesen Bedingungen die Entwicklung zuerst an einigen Silberkeimen ein; das Halogensilberkorn wird dabei unter Bildung von „Ätzgruben“ abgebaut. An den so entstehenden Ätzgruben bilden sich aber viele strukturelle Gitterfehlstellen, welche unter der Voraussetzung, daß die Adsorption des Entwicklers schneller erfolgt als die erneute Adsorption der Gelatine, die Entwicklungsreaktion einleiten können. Auf diese Weise bilden sich sehr viel mehr

Silberfäden als ursprünglich Silberkeime am Halogensilberkorn vorhanden waren.

Daß strukturelle Oberflächenfehlstellen an großen Halogensilberkristallen die Entwicklungsreaktion genau so einleiten können wie die latenten Bildkeime, geht ferner aus folgendem Versuch hervor: Man belichtet einen großen, plättchenförmigen Halogensilberkristall ganz und entwickelt ihn dann zur Hälfte. Darauf löst man im Dunkeln das entwickelte Silber in Salpetersäure auf, wäscht den Kristall in reinem



Abb. 13. Stäbchenförmige AgSCN -Abscheidung auf einer AgBr -100-Fläche, Anfangsstadium. Mosaikbereiche der Substruktur werden sichtbar. Elektronenmikroskopische Übersichtsaufnahme, Kohleabdruck (4500 \times)

wenn der photolytische Kristallabbau an einigen Stellen begonnen hat („Keimbildung“ der Ätzgrubenbildung), wird diese Quantenausbeute anwachsen.

V. Die Entwickelbarkeit der Ätzgruben

Sehr wesentlich scheint der Befund zu sein, daß die strukturellen Gitterstörungen, welche durch das Anätzen auf der Kristalloberfläche entstehen, die Entwicklungsreaktion genau so einleiten können wie die Silberkeime. Die Abb. 9 zeigt zunächst im linken

Wasser und behandelt den Kristall darauf noch mit Wasser (oder bei AgCl mit Cl_2 -Wasser), um alle Spuren restlos zu entfernen. Wird dann der Kristall noch einmal ohne jede Belichtung in absolute Dunkelheit entwickelt, so ist der Teil der Kristalloberfläche, wo der Kristall bei der Erstentwicklung schon einmal abgebaut (angeätzt) wurde, erneut entwickelbar, ohne daß Silberne hinzugekommen wären. Elektronenmikroskopische Stereoaufnahmen (siehe z. B. Abb. 11) lassen entnehmen, daß auch die Entwicklungsreaktion an den Seitenhängen der Ätzgruben bemerkt. Die Form des entwickelten Silbers (Fäden) hängt dabei von den Entwicklungsbedingungen ab (Rezept, Entwicklungsdauer usw.), die Ätzgruben liefern nämlich den Ort am Kristall, wo die Entwicklungsreaktion einsetzt.

VI. Aufwachserscheinungen an Halogensilber-Oberflächen

Bei der Untersuchung der Form der Ätzgruben (s. Abschnitt II) stört oft der folgende, schon erwähnte Effekt: Wird der Ätzvorgang durch Verunreinigen der komplexbildenden Lösung abrupt abgebrochen (s. Abschnitt I), dann scheidet sich an der Kristalloberfläche aus der übersättigten Lösung Halogensilber ab. Die Abb. 5 zeigt oben bereits neben den rechteckigen Ätzgruben die Abscheidung von stäbchenförmigem AgCl auf einer AgCl-Oberfläche.

Besonders deutlich tritt dieser Abscheide-Effekt auf beim Ätzen mit KSCN-Lösungen. Abb. 12 zeigt die Stereo-Aufnahme einer AgCl-Oberfläche (100), welche mit KSCN-Lösung geätzt wurde: Dabei bildeten sich zunächst die großen Mulden und Täler als Ätzgruben. Beim Abbrechen des Ätzvorganges durch Verdünnen der KSCN-Lösung scheidet sich dann noch AgSCN stäbchenförmig auf der angeätzten AgCl-Oberfläche ab, wie es aus Abb. 12 ersichtlich ist.

Man kann diese Abscheidung des AgSCN auf Halogensilberoberflächen auch unabhängig von der Ätzreaktion untersuchen: Wenn man eine möglichst sorgfältig und störungsfrei hergestellte Halogensilberoberfläche zunächst mit einer an AgSCN gesättigten KSCN-Lösung in Kontakt bringt und dann das AgSCN durch Verdünnen abscheidet, dann wächst dieses im Anfangsstadium stäbchenförmig auf die Kristalloberfläche auf. Die Längsrichtung dieser AgSCN-Stäbchen fällt mit der Kristall-Wachstumsrichtung zusammen. An AgBr-Emulsionskörnern wurde eine solche stäb-

chenförmige AgSCN-Abscheidung schon früher beobachtet [3]. Die Abb. 13 (Übersichtsaufnahme) zeigt, wie durch das Aufwachsen von AgSCN auf der 100-AgBr-Kristallfläche einzelne Mosaikbereiche sichtbar werden, innerhalb derer die AgSCN-Stäbchen parallel verlaufen. Die abgeschiedenen AgSCN-Stäbchen zeigen die gegenseitige kristallographische Orientierung

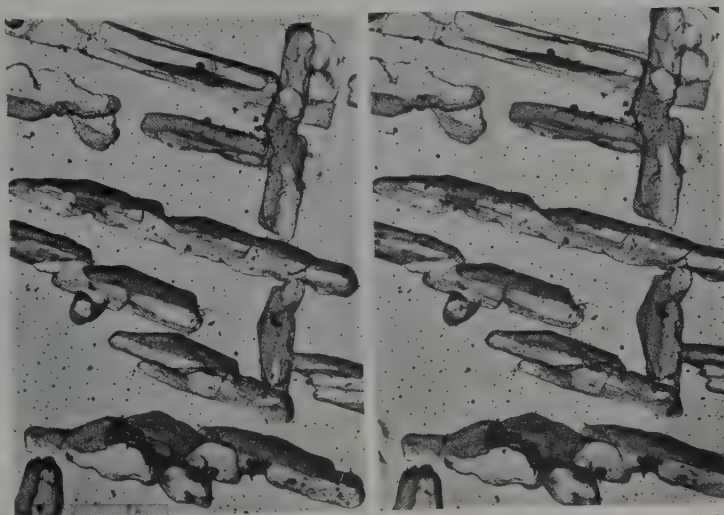


Abb. 14. AgSCN-Abscheidung auf einer AgBr-100-Fläche im Anfangsstadium. Elektronenmikroskopische Stereo-Aufnahme, Kohleabdruck (6600 \times)

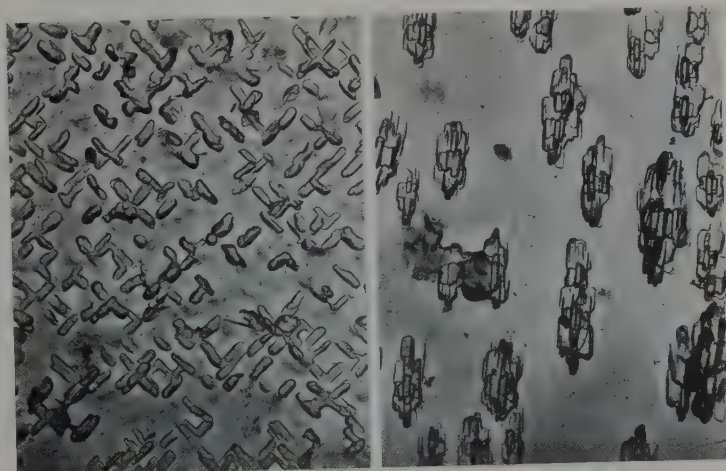


Abb. 15. AgSCN-Abscheidung auf AgBr. Verschiedene, seltenere Abscheidungsformen im Anfangsstadium. Elektronenmikroskopische Aufnahmen, Kohleabdruck (13000 \times)

der Mosaikbereiche an, ferner weisen sie in die Richtung, in die jeder dieser Mosaikbereiche bei der Kristallherstellung gewachsen ist. Die Winkel zwischen den Wachstumsrichtungen benachbarter Mosaikstrukturbereiche liegen vorzugsweise um 90° oder um 180°.

Aus Abb. 14 (Stereo-Aufnahme) ist die Form der aufgewachsenen AgSCN-Stäbchen noch genauer ersichtlich.

Die Abb. 15 zeigt einige seltenere, besondere Abscheidungsformen, welche an die Normalform (Abb. 13 und 14) nur qualitativ erinnern. Bei einer stärkeren AgSCN-Abscheidung wachsen die AgSCN-Stäbchen

weiter: Die Abb. 16 zeigt an lichtmikroskopischen Aufnahmen, wie aus den kleinen, länglichen AgSCN-Gebilden bei weiterer AgSCN-Abscheidung zunächst Kreuze, schließlich größere Sterne werden: Die Stäb-

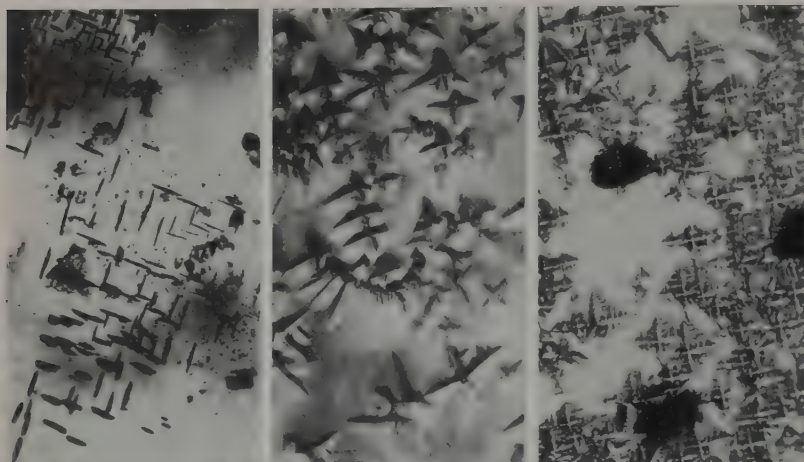


Abb. 16. Wachstum der AgSCN-Stäbchen bei fortgesetzter Abscheidung: Aus den Stäbchen werden erst Kreuze und dann Sterne. Lichtmikroskopische Aufnahme (500 \times)

chen verzweigen sich zunächst senkrecht (vgl. auch Abb. 14 und 15) an einer Stelle, später an mehreren Stellen, es entstehen dabei die aus dem rechten Teilbild der Abb. 16 ersichtlichen sternförmigen Gebilde.



Abb. 17. AgSCN-Abscheidung auf einer AgBr-Oberfläche (100) nach mechanischer Verformung. Lichtmikroskopische Aufnahme (500 \times)

Nach einer mechanischen Verformung der Kristalle entstehen die primären, länglichen AgSCN-Stäbchen und auch die sekundären AgSCN-Sterne regelmäßig bevorzugt entlang gerader Linien, welche im allgemeinen parallel verlaufen oder 90° und 45° gegeneinander geneigt sind (siehe z.B. Abb. 17). Es muß angenommen werden, daß diese Linien die Stellen anzeigen, wo die bei der mechanischen Verformung entstandenen Versetzungsgleitebenen aus dem Kristall die Kristalloberfläche schneiden.

Es ist bemerkenswert, daß dagegen an den Mosaikblockgrenzen selber (Abb. 13) keine bevorzugte AgSCN-Abscheidung zu erkennen war.

Zusammenfassung

Es wird berichtet über das Ergebnis von Ätzversuchen an großen, aus der Schmelze gezüchteten Halogensilber-Einkristallen.

Die Form der mit verschiedenen, komplexbildenden Ätzlösungen erhaltenen Ätzgruben wird untersucht; ferner wird gefunden, daß die Ätzgruben bei längerem Kontakt mit einer an Halogensilber gesättigten Komplettlösung wieder „ausheilen“.

Bei der Bestrahlung bildet sich das photolytische Silber bevorzugt an strukturellen Oberflächenfehlstellen, welche sich an den Steilhängen der Ätzgruben befinden. Sehr wesentlich scheint der Befund zu sein, daß dieselben strukturellen Oberflächenfehlstellen, welche entweder:

a) durch Anätzen der Kristalloberfläche mit Komplexbildnern oder

b) durch Anentwickeln der Oberfläche und Ablösen des entwickelten Silbers durch HNO_3

entstanden sind, auch die Entwicklungsreaktion genau so einleiten können wie die Keime des latenten Bildes. (Alle Silber Spuren wurden nach dem Ätzen oder nach dem Auflösen des entwickelten Silbers durch langzeitige Halogenierung vollkommen zerstört.)

Schutzkolloide (Gelatine, Polyvinylalkohol, Stärke) setzen die Entwickelbarkeit der strukturellen Oberflächenfehlstellen herab.

Beim Verdünnen von gesättigter Silber-Komplettlösung (besonders $\text{KSCN} + \text{AgSCN}$) wächst auf den AgBr-Kristalloberflächen das Silberhalogenid (AgSCN) in Form von länglichen parallelen Stäbchen auf, welche in der Kristallwachstumsrichtung verlaufen. Mosaikblöcke einer Unterstruktur werden auf diese Weise sichtbar. Bei stärkerer AgSCN-Abscheidung wachsen die länglichen Gebilde weiter zu Kreuzen oder Sternen. Nach mechanischer Verformung scheidet sich

das AgSCN in dieser Form bevorzugt an den Linien ab, wo Versetzungsgleitebenen die äußere Kristalloberfläche schneiden.

Literatur: [1] JAENICKE, W., u. K. HAUFFE: Z. Naturforsch. **4a**, 353 (1949). — JAENICKE, W.: Z. Naturforsch. **4a**, 363 (1949). — Z. phys. Chem. **195a**, 88 (1950). — Z. Elektrochem. **55**, 643 (1951); **57**, 843 (1953). — [2] VORST, W. v. D., u. W. DEKEYSER: Naturwiss. **40**, 316 (1953). — HAMILTON, J. F., L. E. BRADY und F. A. HAMM: J. Appl. Phys. **29**, 800 (1958). — JONES, D. A., and J. W. MITCHELL: Phil. Mag. **3**, 1 (1958). — BORNKESSEL, K., u. H. STAUDE: Z. Elektrochem. **62**, 404 (1958). — KLEBER, W.: Z. Elektrochem. **62**, 587 (1958). — [3] FUJISAWA, S., E. MIZUKI und K. KUBOTERA: Phot. Sensitivity. Tokyo Symposium, Maruzen Co. Ltd.

p. 71. — [4] MURIN, A.N.: Dokl. Akad. Nauk SSSR. 65 (1950). — Sci. Ind. Photogr. 22, 350 (1951). — KLEIN, E.: Der Einfluß von Ag-Komplexbildnern auf die Eigenschaften der Negativ- und Umkehrschwärzungskurven. Z. Elektrochem. 61, 1127 (1957). — Veröff. der Agfa-München, Bd. II, S. 14. 1958. — [7] KLEIN, E.: Z.

Elektrochem. 62, 505 (1958). — KLEIN, E., u. R. MATEJEC: Z. Elektrochem. (im Druck). — [8] KLEIN, E., u. R. MATEJEC: Vortrag wiss. phot. Kolloquium, Lüttich 1959.

Privatdozent Dr. EBERHARD KLEIN,
und Dr. REINHARD MATEJEC,
Wissenschaftlich-Photographisches Laboratorium
der Agfa AG, Leverkusen

Lichtelektrische Leitfähigkeit bei anorganischen Komplexverbindungen

Von HEINRICH SCHINDLER

Mit 8 Textabbildungen

(Eingegangen am 14. September 1959)

Einleitung

Lichtelektrische Leitfähigkeit in reinen, unverunreinigten Kristallen tritt nach einer empirischen Regel [1], [2] bei Stoffen auf, deren Brechungsindex größer als zwei ist. Diese Regel ist bei Elementkristallen und einfachen anorganischen Verbindungen gut bestätigt. Über komplizierter gebaute anorganische Stoffe liegen bisher nur wenig Messungen vor. Im folgenden soll die lichtelektrische Leitfähigkeit bei einigen anorganischen Komplexverbindungen berichtet werden. Das Auftreten von Photoleitung bei diesen Substanzen ist deshalb ungewöhnlich, weil deren Brechungsindex bei 1,6 liegt. Die Meßergebnisse werden mit denen von anderen, bereits eingehender untersuchten Photoleitern verglichen.

$K_3Fe(CN)_6$

Die analysenreine Substanz lag pulverförmig vor. Eine Untersuchung des Materials in diesem Zustand ist deshalb ungünstig, weil durch die vielen Korngrößen Effekte auftreten können, die bei der Untersuchung von Einkristallen fehlen. Die Messungen wurden daher nur an Einkristallen vorgenommen.

$K_3Fe(CN)_6$ wurde in verschiedenen Reinheitsstadien untersucht. Technisch reines $K_3Fe(CN)_6$ war in Kristallform vorhanden. Analysenreines, pulverförmiges $K_3Fe(CN)_6$ wurde in doppelt destilliertem Wasser gelöst und mehrmals umkristallisiert. Unter diesen aus der Lösung gewonnenen Kristallen waren einige, die sich bezüglich Größe und Form zur Untersuchung eigneten. Sie hatten Kantenlängen von etwa 2×5 mm.

An der Oberfläche der Kristalle kann sich an der Luft eine Wasserhaut bilden. Diese würde die Werte der Leitfähigkeit stark verfälschen. Um dies zu vermeiden, befand sich der zu untersuchende Kristall bei allen Messungen im Vakuum.

a) An- und Abklingen des Photostroms

Die Messungen wurden nach der Gleichstrommethode vorgenommen. Der Kristall befand sich zwischen zwei Platinelektroden, an die eine Gleichspannung von mehreren Volt gelegt wurde. Aus Vorversuchen war bekannt, daß der Widerstand der Kristalle bei $10^{10} \Omega$ lag. Dies stellte an die Isolation besondere Anforderungen. Der Isolationswiderstand der hier verwendeten Apparatur war größer als $8 \cdot 10^{13} \Omega$. Alle nicht geerdeten Teile der Versuchsanordnung waren zur Abschirmung hochisoliert in geerdeten

Blechkästen untergebracht. Die zu messenden Ströme waren in den Größenordnungen 10^{-9} bis 10^{-13} A. Sie wurden mit Schwingkondensatorverstärkern gemessen. Parallel zum Eingang des Verstärkers waren zur Änderung des Meßbereichs über viele Zehnerpotenzen verschieden große Widerstände geschaltet. Die Belichtung erfolgte quer zum angelegten elektrischen Feld.

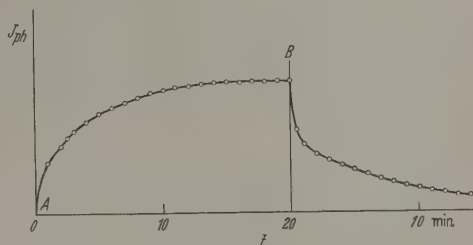


Abb. 1. An- und Abklingen des Photostroms

Die Kurve des zeitlichen An- und Abklingens des Photostroms bei Belichtung bzw. Verdunklung zeigt Abb. 1. Bei Punkt A wird der Kristall belichtet, bei B wieder verdunkelt. In Abb. 1 ist nur der sich dem Dunkelstrom überlagernde Photostrom gezeigt. Der nach 15 bis 20 min erreichte stationäre Zustand ist immer gemeint, wenn im folgenden die Größe des Photostroms in Abhängigkeit irgendwelcher Veränderlicher angegeben wird. Bei einer dem Abklingen folgenden zweiten und weiteren Belichtung steigt der Photostrom wieder auf den Wert der ersten Belichtung an. Ermüdungserscheinungen konnten also nicht beobachtet werden.

b) Abhängigkeit der Größe des Dunkel- und Photostroms vom angelegten elektrischen Feld

Das Ergebnis der Messungen zeigt Abb. 2. Sowohl der Dunkel- wie auch der Photostrom zeigen Ohmsches Verhalten. Zur Berechnung der Quantenausbeute wäre ein Sättigungswert des Photostroms mit zunehmendem Feld von Interesse. Eine Erhöhung des Feldes über die in Abb. 2 angegebenen Werte führte jedoch zu Durchschlägen.

c) Abhängigkeit der Größe des Photostroms von der Intensität des eingestrahlt Lichts

Die Intensität des einfallenden Lichts wurde mit Sektorscheiben meßbar geschwächt. Es ergab sich, daß bei konstanter angelegter Spannung der Photo-

strom der Intensität des einfallenden Lichts proportional ist. Dieses Ergebnis wurde bei Bestrahlung mit weißem Licht, sowie mit monochromatischem Licht von 4500, 5500 und 6500 Å erhalten.

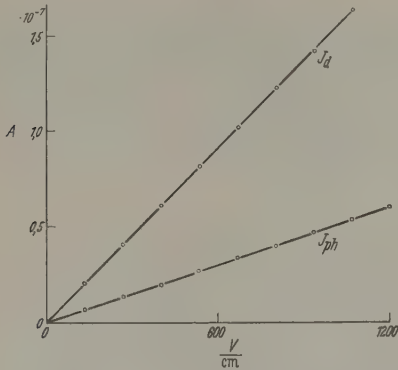


Abb. 2. Abhängigkeit des Dunkel- und Photostroms vom angelegten elektrischen Feld. J_d Dunkelstrom, J_{ph} Photostrom

d) Abhängigkeit der Photoempfindlichkeit von der Wellenlänge des eingestrahlten Lichts

Das Licht einer Xenonlampe wurde mit einem Verlaufsinterferenzfilter spektral zerlegt. Die durchgelassene Intensität ist bei den verschiedenen Spek-

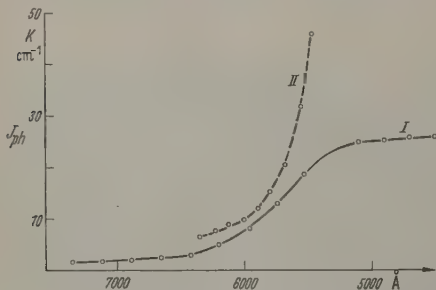


Abb. 3. Absorptionskonstante K (Kurve II) und Photoempfindlichkeit (Kurve I)

tralbereichen nicht gleich. Sie wurde mit einem geeichten Photoelement gemessen. Die in Abb. 3, 4 und 8 angegebenen Kurven sind bereits korrigiert, also auf gleiche einfallende Intensität bezogen.

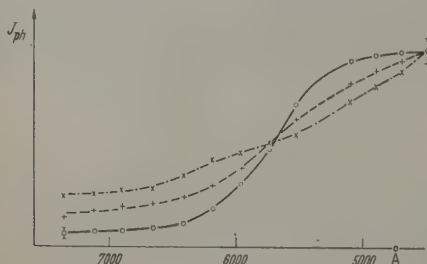


Abb. 4. Einfluß der Verfärbung auf die spektrale Empfindlichkeitsverteilung

In Abb. 3 ist der Gang der Absorptionskonstanten und der Photoempfindlichkeit im sichtbaren Spektralbereich dargestellt. Die Zunahme der Photoempfindlichkeit fällt also zusammen mit einem Anstieg der Absorptionskonstanten K . Bei größeren

Werten von K erfolgt der Anstieg der Empfindlichkeit langsamer, bis sie schließlich konstant bleibt. Die optische Aktivierungsenergie wird im allgemeinen [3] aus der Wellenlänge berechnet, bei der die Photoempfindlichkeit auf die Hälfte gesunken ist. Diese Berechnung führt hier zu dem Wert 2,1 eV.

Die Kurven aller Abbildungen wurden an Kristallen aus analysenreinem Material gemessen, das zur weiteren Reinigung noch mehrmals in doppelt destilliertem Wasser umkristallisiert worden war. Messungen, die an nur technisch reinen Kristallen durchgeführt wurden, ergaben eine erhöhte Photoempfindlichkeit im roten Spektralbereich. Alle anderen Meßergebnisse zeigten innerhalb der Fehlergrenze keine Abhängigkeit vom Reinheitsgrad der Substanz. Setzt man die Kristalle einer Röntgenstrahlung aus, so verfärben sie sich. Die ursprünglich rote Farbe geht in braun über. Durch Beschuß mit Elektronen kann man ebenfalls eine Verfärbung erzielen, die je nach der eingestrahlenen Dosis von dunkelbraun bis schwarz geht. Untersucht man die spektrale Empfindlichkeitsverteilung der Photoleitung bei den bestrahlten, also verfärbten Kristallen, so erhält man das in Abb. 4 dargestellte Ergebnis. Die einzelnen Kurven sind auf gleiche einfallende Intensität bezogen und, da es nur auf den Vergleich der Photoempfindlichkeit bei verschiedenen Wellenlängen ankommt, willkürlich bei 4500 Å zusammengelegt. Die durchgezogene Kurve wurde an einem unverfärbten Kristall gemessen, die gestrichelte an einem mit Röntgenstrahlen verfärbten und die strichpunktierter an einem Kristall, der durch Beschuß mit Elektronen verfärbt war. Der beim unbestrahlten Kristall steile Anstieg der Photoempfindlichkeit zwischen 6000 und 5000 Å wird mit zunehmender Verfärbung immer flacher und verteilt sich auf ein größeres Wellenlängenintervall. Gleichzeitig wird das Verhältnis von Blau- zu Rotempfindlichkeit mit zunehmender Verfärbung kleiner.

e) Die Dunkelleitfähigkeit und ihre Abhängigkeit von der Temperatur

Die Bestimmung des Wertes der Leitfähigkeit wurde nach der Sondenmethode vorgenommen. Gemessen wurde der durch den Kristall fließende Strom und die mit zwei Sonden am Kristall abgegriffene Spannung. 15 Kristalle verschiedenen Reinheitsgrades wurden untersucht. Bei allen ergaben sich für die Leitfähigkeit Werte zwischen $1 \cdot 10^{-10}$ und $2 \cdot 10^{-10} \Omega^{-1} \text{ cm}^{-1}$. Kristalle, die durch Röntgenstrahlen oder Elektronenbeschuß verfärbt waren, zeigten eine höhere Dunkelleitfähigkeit als ungestörte Kristalle. Diese erhöhte Leitfähigkeit zeigte keine zeitliche Änderung. Sie war nach mehreren Wochen noch genau so groß wie unmittelbar nach der Bestrahlung. Die Größe der Leitfähigkeitszunahme hängt von der Stärke der Verfärbung ab. Die Temperaturabhängigkeit der Dunkelleitfähigkeit wurde zwischen 200 und 300° K untersucht. Der dafür verwendete Kryostat wurde von Herrn Dipl.-Phys. P. GRAF hier im Physikalischen Institut gebaut. Dieser Kryostat besteht aus zwei zylindrischen, koaxialen, einseitig geschlossenen Röhren. Das äußere Rohr taucht in das Kühlmittel ein, das innere Rohr trägt eine Heizwicklung. Durch Heizen lassen sich im inneren Rohr, wo sich der zu untersuchende Kristall befindet, Temperaturen

erhalb der des Kühlmittels herstellen. Zur Wärmeübertragung werden inneres Rohr und der Raum zwischen den Rohren mit Wasserstoffgas unter 1 bis 2 Torr gefüllt.

Das Ergebnis der Messungen zeigt Abb. 5. Kurve I gab sich aus Messungen unverfärbter Kristalle. Innerhalb der Fehlergrenzen hatte der Reinheitsgrad den Kurvenverlauf und die Neigung keinen Einfluß, wie Messungen an verschiedenen stark gereinigten Kristallen zeigten. Kurve II wurde aus Messungen an einem dunkelbraun verfärbten Kristall gewonnen. Der Unterschied in der Größe der Leitfähigkeit wird mit abnehmender Temperatur immer größer. Bei höheren Temperaturen dagegen scheinen die Kurven zusammenzulaufen. Einen solchen Verlauf findet man ganz allgemein beim Vergleich von eigenleitenden und verschußleitenden Kristallen derselben Substanz. Aus dem exponentiellen Verlauf der Kurve I kann die thermische Aktivierungsenergie W für die Ladungsträger des Dunkelstroms aus $\sigma = \sigma_0 e^{-\frac{W}{2kT}}$ ermittelt werden. Sie ergibt sich hier zu 1,34 eV. (= Leitfähigkeit.)

f) Messung der Thermospannung

Befindet sich ein Halbleiter nicht im thermischen Gleichgewicht, dann fließen die freien Ladungsträger zur kalten Kristallseite. Im Fall der Stromlosigkeit entsteht also zwischen den sich auf verschiedener Temperatur befindenden Kristallenden eine Spannung. Je nachdem, ob die freien Ladungsträger positiv oder negativ geladen sind, wird das kalte Ende ebenfalls positiv oder negativ. So kann man aus dem Vorzeichen der Thermospannung auf den Leitungstyp des Halbleiters schließen. Etwa im Kreis noch auftretende Thermospannungen zwischen verschiedenen Metallen kann man vernachlässigen, weil sie um 1 bis 2 Größenordnungen kleiner sind.

Zur Messung der Thermospannung wurde der Kristall zwischen zwei als dicke Drähte ausgebildete Elektroden gebracht. Die eine Elektrode blieb auf Zimmertemperatur, das Ende der anderen wurde in schmelzendes Eis getaucht. Am Kristall entstand so eine Temperaturdifferenz von etwa 10°. Sie wurde mit zwei geeichten Thermoelementen gemessen, die an den Kristallenden befestigt waren. Die am Kristall auftretende Thermospannung wurde wieder mit dem Schwingkondensatorverstärker mit hohem Eingangswiderstand ($10^{14} \Omega$) gemessen, da es sich um eine hochohmige Spannungsquelle handelte. ($10^{11} \Omega$).

Das Ergebnis der Messungen war, daß bei $K_3Fe(CN)_6$ -Kristallen der kalte Kontakt immer negativ wurde. Das bedeutet, daß im wesentlichen negative Teilchen für den Ladungstransport verantwortlich sind. Die Größe der Thermospannung ergab sich zu 4 bis 6 mV/°C.

g) Hall-Effekt

Die Messung des Hall-Effekts ist eine zweite, von der Messung der Thermospannung unabhängige Methode zu Bestimmung des Leitungstyps eines Halbleiters. Die Messungen wurden an verdunkelten und belichteten Kristallen durchgeführt. Es wurde eine konventionelle Gleichstrommethode verwendet. Vier paarweise gegenüberliegende Elektroden wurden mit Federn an den Kristall gedrückt. Die Elektroden für

den durch den Kristall fließenden Strom waren großflächig, während die Elektroden zur Abnahme der Hall-Spannung als Schneiden ausgebildet waren. Die magnetischen Feldlinien standen senkrecht auf der Ebene der vier Elektroden. Bei den Messungen befand sich der Kristall wieder im Vakuum von etwa 10^{-3} Torr. Der durch den Kristall fließende Strom und die Hall-Spannung wurden mit Schwingkondensatorverstärkern gemessen. Stehen die beiden Hall-Elektroden einander nicht genau gegenüber, so befinden sie sich auf verschiedenem Potential. Unter der Lupe wurden

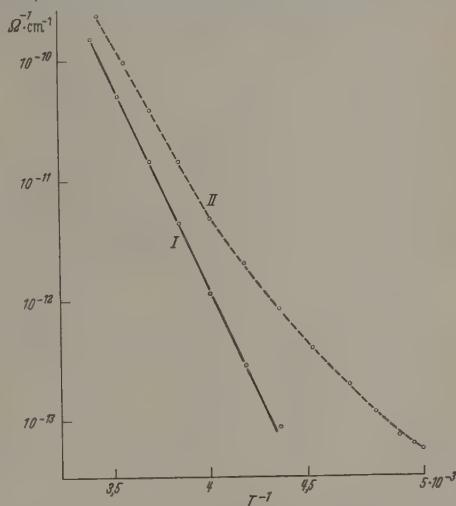


Abb. 5. Temperaturabhängigkeit der Dunkel-Leitfähigkeit

sie möglichst genau gegenübergestellt. Eine noch verbleibende Potentialdifferenz konnte mit einer in den Meßverstärker eingebauten Kompensationseinrichtung ausgeglichen werden. Zur Durchführung der Messungen an belichteten Kristallen mußte das Licht senkrecht zum elektrischen Feld eingestrahlt werden. Von den vier dafür in Frage kommenden Kristallflächen wurden zwei durch die Hall-Elektroden verdeckt, so daß nur die beiden Flächen senkrecht zu den magnetischen Feldlinien übrigblieben. Die Polschuhe des Magneten deckten aber gerade diese Flächen ab. Das Problem wurde dadurch gelöst, daß ein Polschuh an einer Seite etwas abgeschrägt und mit einer Schicht versilberten Glimmer belegt wurde. Diese Schicht diente als Spiegel bei der Einstrahlung. Außerdem konnte damit auch die Ausleuchtung des Kristalls kontrolliert werden. Der Kristall befindet sich an einer Stelle, wo sich die beiden Polschuhe noch parallel gegenüberstehen. Das Magnetfeld war dort noch hinreichend homogen. Abb. 6 zeigt den Weg der Lichtstrahlen.

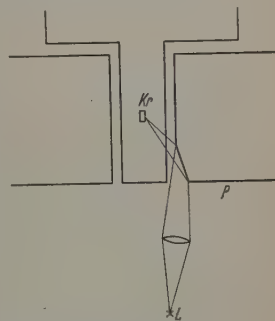


Abb. 6. Lichteinstrahlung, K: Kristall, P: Polschuh des Magneten, L: Lichtquelle

Die Hall-Effekt-Messungen wurden bei Feldern von 4000 bis 7000 Gß durchgeführt. Die Größe des

Feldes wurde mit einer Probepule in Verbindung mit einem ballistischen Galvanometer gemessen. Das Vergleichsfeld zum Eichen der Anordnung war das genau ausgemessene Feld der im Institut stehenden Apparatur zu Messung paramagnetischer Resonanz.

Die Ergebnisse der Hall-Effekt-Messungen an belichteten und unbelichteten $K_3Fe(CN)_6$ -Kristallen waren innerhalb der Fehlergrenzen gleich. Die an vielen Kristallen durchgeführten Messungen ergaben bezüglich Größe und Vorzeichen immer die gleiche Hall-Konstante. Unterschiedlich war nur der Rauschabstand, also die erzielbare Genauigkeit. Bei Kon-

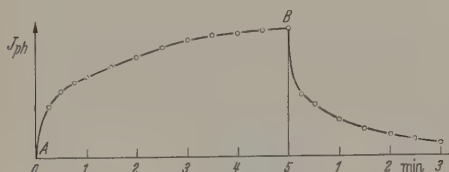


Abb. 7. An- und Abklingen des Photostroms

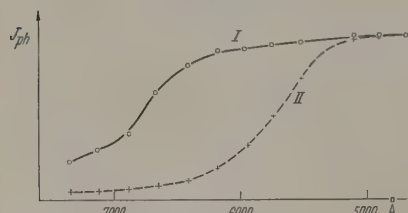


Abb. 8. Spektrale Empfindlichkeitsverteilung

trollmessungen mit einem umgepoltem elektrischem und magnetischem Feld wurden ebenfalls die gleichen Ergebnisse erzielt.

Für unendlich lange Proben gilt:

$$U_H = R \frac{I \cdot B}{d} \quad (1)$$

U_H = Hall-Spannung,

I = Strom im Kristall,

B = Flußdichte des Magnetfeldes,

d = Kristalldicke in Richtung der magnetischen Feldlinien.

U_H , I , B und d werden gemessen, die Hall-Konstante R kann aus (1) berechnet werden.

Für endliche Probenlängen muß eine Korrektur vorgenommen werden [4]. Das Verhältnis von Kristalllänge zu Kristallbreite betrug bei den hier durchgeführten Versuchen 2:1. Die Hall-Konstante mußte zur Längenkorrektur mit dem Faktor 1,3 multipliziert werden. Der Wert der nach (1) berechneten und korrigierten Hall-Konstanten lag für alle untersuchten $K_3Fe(CN)_6$ -Kristalle zwischen $1,5 \cdot 10^{10}$ und $2,5 \cdot 10^{10}$ cm³/Asec. Das Vorzeichen der Hall-Spannung zeigte, daß vorwiegend Elektronen für den Stromtransport verantwortlich sind. Dadurch wird das aus Thermokraft-Messungen erhaltene Ergebnis bestätigt.

$K_4Fe(CN)_6$

Wie bei $K_3Fe(CN)_6$ wurden auch bei $K_4Fe(CN)_6$ die Kristalle in wäßriger Lösung gezüchtet. Quantitative Messungen, die länger als einige Minuten dauerten, konnten an $K_4Fe(CN)_6$ jedoch nicht durchge-

führt werden, weil die Kristalle im Vakuum ihr Kristallwasser abgaben. Kurze halbquantitative Untersuchungen ergaben, daß die Dunkelleitfähigkeit von $K_4Fe(CN)_6$ bei Zimmertemperatur um etwa zwei Größenordnungen kleiner ist als die von $K_3Fe(CN)_6$. Auch bei starker Lichteinstrahlung konnte keine durch die Belichtung hervorgerufene Widerstandsänderung beobachtet werden. $K_4Fe(CN)_6$ zeigte also keine lichtelektrische Leitfähigkeit.

$K_3Mn(CN)_5NO$

Die Kristalle wurden, wie bei $K_3Fe(CN)_6$ beschrieben, in wäßriger Lösung gezüchtet. Sie verwittern wie die von $K_4Fe(CN)_6$ im Vakuum. Die dadurch bedingte Änderung der hier zu untersuchenden Eigenschaften geht jedoch so langsam vor sich, daß sie bei Messungen, die nicht länger als 40 min dauern, innerhalb der Fehlergrenzen bleiben. Die im folgenden angeführten Messungen wurden innerhalb dieser Zeit ausgeführt. Dazu wurden dieselben Apparate und Versuchsanordnungen, wie sie bei $K_3Fe(CN)_6$ beschrieben sind, benutzt.

a) An- und Abklingkurve des Photostroms

Die Meßkurve zeigt Abb. 7. Bei Punkt A wird der Kristall belichtet, bei B verdunkelt. Der Verlauf der Kurve ist ähnlich dem der Kurve von $K_3Fe(CN)_6$ (Abb. 1). Der zeitlich konstante Wert des Photostroms wird jedoch schon nach kürzerer Zeit erreicht. Innerhalb der durch die Verwitterungserscheinungen begrenzten Versuchsdauer konnten keine Ermüdungserscheinungen beobachtet werden.

b) Abhängigkeit der Größe des Photostroms von der Intensität des eingestrahnten Lichts

Wie bei $K_3Fe(CN)_6$ ist auch bei $K_3Mn(CN)_5NO$ der Photostrom der Intensität des eingestrahnten Lichts proportional. Dies gilt auch hier nicht nur für die Bestrahlung mit weißem Licht, sondern auch für die mit monochromatischem Licht von 4500, 5500 und 6500 Å.

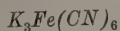
c) Abhängigkeit der Photoempfindlichkeit von der Wellenlänge des eingestrahnten Lichts

Das Ergebnis der Messungen ist in Abb. 8 dargestellt. Kurve I zeigt den Verlauf bei $K_3Mn(CN)_5NO$ und Kurve II zum Vergleich den Verlauf bei $K_3Fe(CN)_6$. Die beiden Kurven sind wieder einzeln auf gleiche einfallende Intensität bezogen und zum besseren Vergleich bei 4500 Å zusammengelegt. Der qualitative Verlauf ist ähnlich dem bei $K_3Fe(CN)_6$ gefundenen. Der Anstieg der Photoempfindlichkeit und die folgende Konstanz sind jedoch zu längeren Wellen hin verschoben.

$K_2Ni(CN)_4$

Auch die Kristalle dieser Substanz geben ihr Kristallwasser im Vakuum ab. Durch Lichteinstrahlung wird dieser Prozeß stark beschleunigt. Die Änderung der zu untersuchenden Eigenschaften erfolgt so schnell, daß keine quantitativen Messungen möglich waren. Aus qualitativen Untersuchungen kann man jedoch schließen, daß bei $K_2Ni(CN)_4$ lichtelektrische Leitfähigkeit auftritt.

Diskussion der Meßergebnisse



Die An- und Abklingkurven sind denen anderer Photoleiter ähnlich. Die Zeiten für das An- und Abklingen unterscheiden sich bei verschiedenen Photoleitern um Größenordnungen. Die hier gemessenen Zeiten sind vergleichbar mit den bei CdS und MoS₃ gefundenen [3]. Der Photostrom erreicht einen stationären Wert. Dies ist bei Annahme desselben Mechanismus wie bei bekannten Photohalbleitern zu erwarten. Eine Raumladung, die den weiteren Stromfluß hemmen würde, kann sich hier nicht ausbilden, weil der Photostrom kleiner, oder höchstens in der gleichen Größenordnung wie der Dunkelstrom ist. Das Vorhandensein eines stationären Wertes des Photostroms, den man stundenlang aufrechterhalten kann, sowie die Tatsache, daß auch bei mehrmaligem Belichten desselben Kristalls keine Ermüdungserscheinungen beobachtet werden konnten, spricht gegen eine Bedeutung des Effekts der Stromzunahme bei Belichtung als photochemische Reaktion.

Die Spannungsproportionalität des Dunkel- und Photostroms wie sie Abb. 2 zeigt, ist bei Photoleitern häufig zu finden. Wegen der Durchschläge bei höheren Feldstärken konnte kein Sättigungswert erreicht werden um daraus eine Quantenausbeute zu berechnen. Löst das Fließen des Photostroms Prozesse aus, die den spezifischen Widerstand des Kristalls noch weiter senken, dann überlagert sich dem direkt durch das Licht verursachten Photostrom ein zweiter Anteil. Der Photostrom steigt dann also stärker als spannungsproportional. Da dies bei $K_3Fe(CN)_6$ nicht beobachtet wurde, kann man solche Effekte ausschließen.

Aus der Messung der Wellenlängenabhängigkeit der Photoempfindlichkeit folgt beim Vergleich mit der Absorptionskonstante, daß die lichtelektrische Leitfähigkeit im langwelligen Ausläufer der Absorptionskante auftritt. Dies findet man bei Photoleitern ganz allgemein. Wie Abb. 3 zeigt, fällt der Anstieg der Photoempfindlichkeit mit einem Anstieg der Absorptionskante zusammen. Das bedeutet: Wenn mehr Quanten absorbiert werden, werden auch mehr Ladungsträger gebildet. Bei Wellenlängen unter 5000 Å steigt die Photoempfindlichkeit nicht mehr an, trotz des weiteren Anstiegs der Absorptionskonstanten. Dies kann man so deuten: Wegen des schon großen Wertes der Absorptionskonstanten ist die Eindringtiefe des Lichts in den Kristall sehr klein gegen dessen Dicke. Die stärkere Absorption verursacht eine große Ladungsträgerdichte in einer dünnen oberflächennahen Schicht. Dadurch wird die Rekombinationswahrscheinlichkeit stark erhöht und die Gesamtzahl der freien Ladungsträger nimmt ab. Lichtelektrische Leitfähigkeit tritt in der Regel bei Einstrahlung von Licht derjenigen Wellenlänge auf, für die die Absorptionskonstante Werte zwischen 1 und 100 cm⁻¹ hat. Dies ist auch bei $K_3Fe(CN)_6$ erfüllt.

Es ist bemerkenswert, daß Stoffe, deren Abnahme der Absorptionskonstanten mit zunehmender Wellenlänge langsam erfolgt, Photoleitung zeigen [5]. So hat z.B. AgCl einen langwelligen Ausläufer der Absorptionskante, der sich über einen großen Spektralbereich hinzieht. Stoffe mit „steiler Absorptionskante“ hingegen wie z.B. NaCl zeigen in reinem Zu-

stand keine Photoleitung. Bei dem hier untersuchten $K_3Fe(CN)_6$ findet man einen langsam fallenden langwelligen Ausläufer der Absorptionskante, so daß also Übereinstimmung mit den bei anderen Photoleitern gesammelten Erfahrungen besteht.

Wie Abb. 4 zeigt, ist das Verhältnis von Blau- zu Rotempfindlichkeit bei Kristallen, die mit Elektronen oder Röntgenstrahlen bestrahlt worden waren, wesentlich kleiner als bei unbestrahlten. Die gesteigerte Rotempfindlichkeit wird auf die Bildung von Störstellen durch den Beschuß zurückgeführt. Die Ionisierungsenergie dieser Störstellen ist kleiner als die Aktivierungsenergie im ungestörten Kristall.

Aus der Temperaturabhängigkeit des Dunkelstroms unverfärbter Kristalle kann man aus dem Verlauf der Kurve I in Abb. 5 eine thermische Aktivierungsenergie berechnen. Die Kurve, die bei Messungen an verfärbten Kristallen erhalten wurde, hat keine einheitliche Neigung. Sie weicht bei tiefen Temperaturen stark von der des unverfärbten Kristalls ab und nähert sich ihr asymptotisch bei höherer Temperatur. Aus diesem Temperaturverlauf der Leitfähigkeit kann keine Aktivierungsenergie berechnet werden. Man kann das Temperaturverhalten des Dunkelstroms so deuten: Durch Elektronen- oder Röntgenbestrahlung des Kristalls sind Störstellen gebildet worden, deren Ionisierungsenergie kleiner ist als die Aktivierungsenergie für die Freimachung von Ladungsträgern beim ungestörten Kristall. Bei tiefen Temperaturen überwiegen daher die Ladungsträger aus den Störstellen. Die Kurve des verfärbten Kristalls nähert sich der des unverfärbten, wenn die Zahl der Ladungsträger aus Störstellen klein ist gegen die Gesamtzahl der Ladungsträger. Einen solchen Kurvenverlauf erhält man ganz allgemein bei der Aufnahme der Temperatur-Leitfähigkeitskurve eines eigenleitenden und eines *n*-leitenden Kristalls derselben Substanz [6].

Für die Tatsache, daß vorwiegend Elektronen für den Stromtransport verantwortlich sind, sprechen die Ergebnisse der Messungen der Thermokraft und des Hall-Effekts. Die Größe der Hall-Konstanten liegt zwischen $1,5 \cdot 10^{10}$ und $2,5 \cdot 10^{10}$ cm³/Asec. Das ist ein hoher Wert im Vergleich mit den bei anderen Photoleitern oder Halbleitern gemessenen Werten.

Liegt Störleitung vor, so gilt:

$$R = \frac{r}{en} \quad (2)$$

$$R = \text{Hall-Konstante,} \\ n = \text{Ladungsträgerdichte.}$$

r hängt vom Streumechanismus ab. Bei thermischer Streuung hat *r* den Wert $3\pi/8$. Er bleibt aber auch bei nichtthermischer Streuung immer in der Gegend von 1. Bei der hier erzielten Genauigkeit kann man *r* immer = 1 setzen. Man erhält die „Hall-Beweglichkeit“ der Ladungsträger μ_H

$$\mu_H = R\sigma \quad \sigma = \text{Leitfähigkeit.}$$

Aus dem Temperaturverhalten der Leitfähigkeit kann man aber schließen, daß man es bei unverfärbten Kristallen nicht mit Störleitung zu tun hat, sondern mit der Eigenleitung. Deshalb muß man bei der Berechnung der Beweglichkeit die dafür geltenden

Beziehungen verwenden [6]. Hier gilt:

$$R = \frac{1}{en} \frac{\mu_- - \mu_+}{\mu_- + \mu_+} \quad (3)$$

μ_- = Elektronenbeweglichkeit,
 μ_+ = Löcherbeweglichkeit.

$R\sigma$ gibt hier die Differenz der Beweglichkeiten. Aus den gemessenen Werten von R und σ erhält man:

$$\mu_- - \mu_+ = (4 \pm 1) \text{ cm}^2/\text{Vsec}$$

$$\sigma = en(\mu_- + \mu_+). \quad (4)$$

Aus (4) kann also die Summe der Beweglichkeiten erhalten werden. σ ist gemessen, n muß aus (5) berechnet werden

$$n = \frac{2(2\pi m_{\text{eff}} kT)^{\frac{3}{2}}}{h^3} e^{-\frac{\Delta E}{2kT}}. \quad (5)$$

Hier ist ΔE gemessen, m_{eff} jedoch unbekannt. Setzt man für m_{eff} näherungsweise die Masse der freien Elektronen ein, dann erhält man für die Summe der Beweglichkeiten: $(12 \pm 2) \text{ cm}^2/\text{Vsec}$.

Aus den mittleren Werten der Hall-Konstanten und der Leitfähigkeit ergeben sich somit folgende mittlere Werte (Voraussetzung: $m_{\text{eff}} = m_{\text{freie Elektronen}}$):

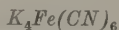
$$\mu_- = 8 \text{ cm}^2/\text{Vsec} \quad \mu_+ = 4 \text{ cm}^2/\text{Vsec}.$$

Eine Deutung der Stromerhöhung durch Erwärmung, die bei der Belichtung auftritt, ist auszuschließen. Diese Behauptung wird durch das folgende Experiment gestützt:

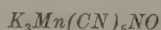
1. Man legt eine Spannung an den Kristall und mißt die Stromerhöhung bei Belichtung.

2. Man schaltet den Kristall ohne Spannungsquelle direkt an den Eingang eines Spannungsmessers und bestrahlt mit gleicher Intensität nur die eine Seite; man verwendet den Kristall mit den Elektroden also als Thermoelement.

Aus der damit gemessenen Thermospannung kann man die Temperaturerhöhung des Kristalls bei Bestrahlung ausrechnen, weil die Thermospannung pro Grad Temperaturdifferenz bekannt ist. Aus der Temperaturzunahme kann über den bekannten Temperaturkoeffizienten des Widerstandes die Stromzunahme durch Erwärmung ausgerechnet werden. Tut man dies, so findet man, daß die durch Erwärmung hervorgerufene Stromerhöhung 1 bis 2 Größenordnungen kleiner ist als die bei Belichtung wirklich gemessene. Der Photostrom wird also direkt durch das Licht und nicht über den Weg der Erwärmung hervorgerufen.



Wie berichtet, zeigt $\text{K}_4\text{Fe}(\text{CN})_6$ im Gegensatz zu $\text{K}_3\text{Fe}(\text{CN})_6$ keine lichtelektrische Leitfähigkeit. Der stabile $\text{K}_4\text{Fe}(\text{CN})_6$ Komplex ist diamagnetisch, während $\text{K}_3\text{Fe}(\text{CN})_6$ paramagnetisch ist. Es ist möglich, daß das ungepaarte Elektron bei $\text{K}_3\text{Fe}(\text{CN})_6$ mit dem Auftreten der Photoleitung in Verbindung steht.



Die Ergebnisse der Messungen an dieser Substanz sind den an $\text{K}_3\text{Fe}(\text{CN})_6$ erhaltenen ganz analog. Die An- und Abklingkurve hat dieselbe Form, erreicht aber den stationären Wert schon nach kürzerer Zeit. Bei der Intensitätsabhängigkeit des Photostroms geben

beide Substanzen ebenfalls dasselbe Ergebnis. Betrachtet man die Photoempfindlichkeit in Abhängigkeit von der Wellenlänge des eingestrahnten Lichts, so findet man qualitativ wieder denselben Verlauf bei $\text{K}_3\text{Mn}(\text{CN})_5\text{NO}$ und $\text{K}_3\text{Fe}(\text{CN})_6$. Der Anstieg der Empfindlichkeit ist nach längeren Wellen hin verschoben, entsprechend einer anders verlaufenden optischen Absorption.

Zusammenfassung

Bei einigen anorganischen Komplexverbindungen wurde lichtelektrische Leitfähigkeit gefunden und untersucht. Das Auftreten von Photoleitung bei diesen Substanzen ist deshalb ungewöhnlich, weil deren Brechungsindex bei 1,6 liegt, während er nach der Pohlsons Regel größer als zwei sein soll.

Geeignet für eingehendere Untersuchungen war $\text{K}_3\text{Fe}(\text{CN})_6$. Seine Photo- und Dunkelleitfähigkeit wurde näher untersucht. Die lichtelektrischen Eigenschaften sind mit denen anderer Photoleiter vergleichbar. Der Photostrom ist proportional der Intensität des eingestrahnten Lichts und der angelegten Spannung. Hält man diese beiden Parameter konstant und ändert die Wellenlänge des einfallenden Lichts, so findet man beim Vergleich mit der Absorptionskonstante, daß lichtelektrische Leitfähigkeit im langwelligen Ausläufer der Grundgitterabsorption auftritt. Bezüglich der Dunkelleitfähigkeit zeigt $\text{K}_3\text{Fe}(\text{CN})_6$ halbleiterähnliche Eigenschaften. Der Dunkelstrom rührt von der Eigenleitung des Kristalls her. Eine thermische und eine optische Aktivierungsenergie konnte zu 1,34 bzw. 2,1 eV bestimmt werden. Aus Messungen des Hall-Effekts und der Leitfähigkeit wurde die Beweglichkeit der Ladungsträger ermittelt. Für den Ladungstransport sind vorwiegend Elektronen verantwortlich. Die Kristalle konnten durch Beschuß mit Elektronen und Röntgenstrahlen verfärbt werden. Dadurch änderte sich die Temperaturabhängigkeit des Dunkelstroms und die spektrale Verteilung der Photoempfindlichkeit.

Lichtelektrische Leitfähigkeit mit Eigenschaften, die den bei $\text{K}_3\text{Fe}(\text{CN})_6$ gefundenen analog sind, konnte auch bei $\text{K}_3\text{Mn}(\text{CN})_5\text{NO}$ festgestellt werden. Photoleitend war auch $\text{K}_2\text{Ni}(\text{CN})_4$. Keine lichtelektrische Leitfähigkeit zeigte dagegen $\text{K}_4\text{Fe}(\text{CN})_6$.

Herrn Professor Dr. G. Joos danke ich sehr für die Anregung zu dieser Arbeit, für wertvolle Hinweise und fördernde Unterstützung. Nach seinem Tode übernahm Professor Dr. H. Ewald die Betreuung der Arbeit, wofür ich ihm zu großem Dank verbunden bin. Für anregende Diskussionen möchte ich Herrn Priv.-Doz. Dr. W. Waidele herzlich danken. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft bin ich für die Bereitstellung von Mitteln für wertvolle Meßgeräte zu großem Dank verpflichtet.

Literatur: [1] POHL, R. W., u. B. GUDDEN: Z. Physik **16**, 170 (1923). — [2] GUDDEN, B.: Lichtelektrische Erscheinungen. Berlin: Springer 1928. — [3] MOSS, T. S.: Photoconductivity in the Elements. London: Butterworths Scientific Publ. 1952. — [4] LUPPMANN, H. J., u. F. KUERT: Naturwiss. **45**, 156 (1958). — [5] MOTT, N. F., u. R. W. GURNEY: Electronic Processes in Ionic Crystals. Oxford: Clarendon Press 1950. — [6] MADELUNG, O.: Handbuch der Physik, Bd. XX. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1957.

Dr. HEINRICH SCHINDLER,
Physikalisches Institut der T. H. München

Experimentelle und theoretische Untersuchungen an ebenen Flächenantennen *

VON SIEGFRIED BLUME

Mit 26 Textabbildungen

(Eingegangen am 1. August 1959)

Übersicht über die wichtigsten Bezeichnungen

- z = kartesische Koordinaten
 μ = elliptische Kegelkoordinaten
 φ = sphärische Polarkoordinaten
 φ = ebene Polarkoordinaten
 φ = halber Öffnungswinkel eines Kreissektors
 $90^\circ - \alpha$ = Dielektrizitätskonstante des freien Raumes
 ϵ = Permeabilität des leeren Raumes
 ϵ, ξ, Φ = Konstanten Gl. (78)
 $2\pi/\lambda$ = Kreiswellenzahl
 λ = Wellenlänge im Vakuum
 ν = Kreisfrequenz
 B = Konstanten des elliptischen Kegelkoordinatensystems
 B = Konstanten Gl. (83)
 B = Reihenentwicklungskoeffizienten
 B = Konstanten Gl. (81b), (91b), (92b)
 $E_\nu, E_\mu; E_\varphi; E_\rho$ = elektrische Feldkomponenten in elliptischen Kegelkoordinaten, sphärischen Polarkoordinaten und ebenen Polarkoordinaten
 E = Konstante mit der Dimension einer elektrischen Feldstärke
 $E(k)$ = vollständiges elliptisches Integral zweiter Gattung (mod k)
 $(\nu), F_n^s(\mu)$ = Lamésche Funktionen
 (α) = Entwicklungskoeffizienten des Reflexionskoeffizienten
 $H_\nu, H_\mu; H_\varphi$ = magnetische Feldkomponenten in elliptischen Kegelkoordinaten und in Polarkoordinaten
 H = Konstante mit der Dimension einer magnetischen Feldstärke
 $H(x)$ = erste Hankelsche Zylinderfunktion
 $H(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+\frac{1}{2}}^1(x)$
 $\sqrt{-1}$ = imaginäre Einheit
 $J(x)$ = Besselsche Zylinderfunktion
 $J(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x)$
 $b/a = \cos \alpha$
 $K(k)$ = vollständiges elliptisches Integral erster Gattung (mod k)
 $L_n^s(\nu), L_n^s(\nu), M_n^s(\nu), N_n^s(\nu)$ = Lamésche Funktionen der vier Klassen
 ρ = Reflexionskoeffizient
 ρ = Hertzscher Vektor (elektrischer Strahlungsvektor)
 ρ = Fitzgeraldscher Vektor (magnetischer Strahlungsvektor)
 $R = R + iX$ = Eingangsimpedanz
 r_0 = Länge des Kreissektors
 r_0 = skalares elektrodynamisches Potential
 r_0 = Variable Gl. (68)
 v, w' = Lösungen der Wellengleichung
 Z = Wellenwiderstand der Sektorleitung
 $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ = Feldwellenwiderstand

untersucht. Eine Lösung der Maxwell'schen Gleichungen ist für nichtrotationssymmetrische Strahler dieser Art noch nicht bekanntgeworden.

Es soll im ersten Abschnitt dieser Arbeit die Kreissektor-Antenne als Randwertproblem behandelt werden. Im zweiten Abschnitt wird über eigene Messungen an unsymmetrischen, ebenen Flächenantennen berichtet.

Teil B

Die Kreissektor-Antenne als Randwertproblem

1. Problemstellung und Wahl eines geeigneten Koordinatensystems

a) Problemstellung und Lösungsmethode

Wir verbinden einen Kreissektor mit dem Öffnungswinkel 2α über den Innenleiter eines Koaxialkabels mit einem unsymmetrisch arbeitenden Sender. Der Kreissektor liege in der xz -Ebene eines kartesischen Koordinatensystems. Den Außenleiter des Koaxialkabels wollen wir an eine sehr gut leitende Metallplatte anschließen, die in der yz -Ebene liegt.

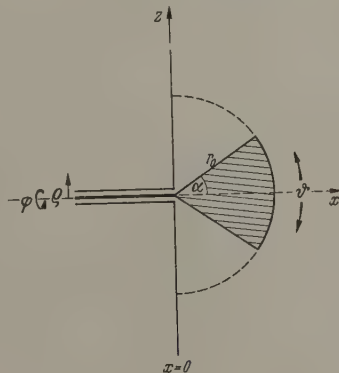


Abb. 1. Ebene Kreissektor-Antenne, axialsymmetrisch erregt

Durch diese unsymmetrische Speisung wird bei Widerstandsmessungen eine Abschirmung zwischen Strahler und Mebleitung erreicht, die, als Koaxialleitung ausgebildet, zwischen Sender und Antenne liegt.

Bei den folgenden theoretischen Untersuchungen wollen wir mit einer ins Unendliche ausgedehnten und sehr gut leitenden Grundplatte rechnen.

Eine vom Sender auf der Koaxialleitung erregte Lecher-Welle mit den Feldkomponenten E_ρ und H_φ , auch TEM-Welle genannt, laufe in Richtung der positiven x -Achse auf den Sektor zu (Abb. 1). Beim Eintritt in die aus Kreissektor als Innenleiter und Grundebene als Außenleiter bestehende Leitung der Länge r_0 bleibt der Typ der Welle erhalten. Die Berechnung der TEM-Welle in dieser „elliptischen Kegelleitung“ ist die erste Aufgabe. Am Ende unserer

Teil A

Abgrenzung der Themas

Über die Breitbandeigenschaften von flächenhaften ebenen Dipolen ist bereits in mehreren Arbeiten berichtet worden (s. [1] bis [6]). Flächenhafte Antennen wurden dabei hauptsächlich experimentell

* Dissertation aus dem Institut für Angewandte Physik der Universität Marburg a. d. L.

von der Kugelhalbkugel $r=r_0$ begrenzten Leitung setzen wir einen Teil der TEM-Welle durch eine Kugelwelle elektrischen Typs in den freien Raum fort. Der restliche Teil wird an eben dieser Aperturfläche reflektiert werden und zur Bildung einer stehenden Welle auf der Leitung führen.

Die Kugelwelle elektrischen Typs im Strahlungsraum besitzt z.B. eine elektrische Feldkomponente in Fortpflanzungsrichtung, die TEM-Welle dagegen nicht. Zur vollständigen Beschreibung der Feldverteilung auf der Aperturfläche müssen deshalb die höheren Wellentypen in der Sektorleitung neben der TEM-Welle herangezogen werden. Den Aufbau dieser E -Wellen bzw. H -Wellen der Sektorleitung — also Wellen mit einer elektrischen bzw. magnetischen Feldkomponente in Fortpflanzungsrichtung — werden wir aufzeigen. Nun ist aus der Theorie der Hohlrohrleiter bekannt, daß solche Wellentypen stets eine kritische Wellenlänge besitzen. Wenn wir das System mit einer Wellenlänge erregen, die oberhalb der größten kritischen Wellenlänge — hier von der Größenordnung r_0 — liegt, dann werden alle Nebenwellen stark gedämpft. Man wird deshalb annehmen dürfen, daß unter der Voraussetzung $\lambda > r_0$ die durch die Nebenwellen beschriebene Störung rasch abklingt. Insbesondere wird am Speisepunkt der Antenne praktisch nur die TEM-Welle vorhanden sein. Wir verzichten deshalb von vornherein auf eine vollständige Beschreibung der Feldverteilung in der Aperturfläche $r=r_0$ und berücksichtigen allein die TEM-Welle. Eine Verbesserung durch Hinzunahme höherer Wellentypen führt allerdings auch zu großen mathematischen Schwierigkeiten. Unsere Vereinfachung läßt sich schließlich auch durch die befriedigende Übereinstimmung zwischen experimentellem Befund und berechneten Werten rechtfertigen. Die Kugelwelle elektrischen Typs außerhalb des Halbkugelraumes vom Radius r_0 müssen wir gewissen Symmetrieforderungen unterwerfen. Auf der unendlich gut leitenden Grundlebene müssen ferner die tangentialen elektrischen Komponenten verschwinden. Die einander entsprechenden Feldkomponenten der TEM-Welle im Innenraum der Leitung und der Kugelwelle elektrischen Typs im Außenraum der Leitung schließen wir auf der Aperturfläche aneinander an. Wir gelangen so zu einer aus den Randwerten gewonnenen Lösung der Maxwell'schen Gleichungen.

Die Behandlung dieses Randwertproblems lehnt sich in der Methodik an Arbeiten von SCHELKUNOFF [7] und PAPAS u. KING [8] über rotationssymmetrische Kegelantennen an. Eine Darstellung dieser Methode findet man auch bei ZUHRT [9].

b) Einführung elliptischer Kegelkoordinaten

Wir führen zunächst elliptische Kegelkoordinaten r, ν, μ ein. In der Nomenklatur wollen wir uns dabei möglichst weitgehend an das Buch von HOBSON [11] halten.

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \vartheta \cdot r \frac{\mu \nu}{b a}, \\ y &= r \sin \vartheta \cos \varphi = r \frac{|\mu^2 - \nu^2|}{b \sqrt{a^2 - b^2}} \sqrt{b^2 - \nu^2}, \\ z &= r \sin \vartheta \sin \varphi = r \frac{\sqrt{a^2 - \mu^2} \sqrt{a^2 - \nu^2}}{a \sqrt{a^2 - b^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

a und b sind positive Zahlen, wobei willkürlich $a > b$ gesetzt wurde. r, ν, μ haben die Bereiche

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq r, \\ 0 &\leq \nu^2 \leq b^2 \leq \mu^2 \leq a^2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Die orthogonalen Flächenscharen bestehen aus konzentrischen Kugeln

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad (3)$$

elliptischen Kegeln um die x -Achse

$$\frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{a^2 - \nu^2} = 0 \quad (4)$$

und elliptischen Kegeln um die z -Achse

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{a^2 - \mu^2} = 0. \quad (5)$$

Das Bogenelement lautet

$$ds^2 = dr^2 + r^2(\mu^2 - \nu^2) \times \left(\frac{d\nu^2}{(b^2 - \nu^2)(a^2 - \nu^2)} + \frac{d\mu^2}{(\mu^2 - b^2)(a^2 - \mu^2)} \right). \quad (6)$$

Die Polarachse hat bei den Transformationsformeln (1) die Richtung der positiven x -Achse. φ wird von der oberen Hälfte der xy -Ebene aus gezählt im mathematisch positiven Sinne. Wenn der Punkt (xyz) einen

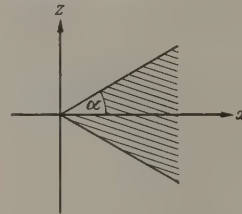


Abb. 2. Entarteter elliptischer Kegel in positiver z -Richtung

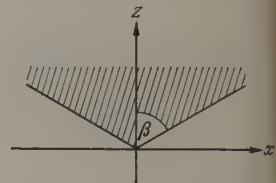


Abb. 3. Entarteter elliptischer Kegel in positiver z -Richtung

Oktanten durchläuft, so durchlaufen r, ν, μ gerade ihr oben zugewiesenes Intervall. Nimmt eine der Koordinaten ν bzw. μ ihren Grenzwert an, so rückt der Punkt (xyz) gerade auf eine der Grenzebenen des Oktanten.

Untersuchung der Grenzfälle.

1. Der elliptische Kegel um die x -Achse entartet für $\nu=0$ in die yz -Ebene.

2. Wir lassen sodann in der Gleichung des Kegels um die x -Achse $y \rightarrow 0$ gehen und setzen $\nu=b$ ein. Aus (4) ergibt sich dann

$$\frac{x^2}{z^2} = \frac{b^2}{a^2 - b^2}.$$

Nun ist aber (Abb. 2)

$$\frac{x}{z} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Daraus folgt also

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{b^2}{a^2 - b^2}.$$

Die letzte Gleichung ist erfüllt, wenn wir setzen:

$$\cos \alpha = \frac{b}{a}, \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}. \quad (7)$$

Der elliptische Kegel um die x -Achse entartet für $\nu=b$ in einen Sektor in der xz -Ebene mit dem halben

ungswinkel α . Durch das Verhältnis b/a wird α aus Gl. (11) und (14)gelegt.

Für $\mu = a$ entartet der elliptische Kegel um die Achse in die xy -Ebene.

Wir lassen in der Gleichung des elliptischen Kegels um die z -Achse $y \rightarrow 0$ gehen und setzen $\mu = b$

Aus (5) folgt:

$$\frac{x^2}{z^2} = \frac{b^2}{a^2 - b^2}.$$

ist aber (Abb. 3)

$$\frac{x}{z} = \operatorname{tg} \beta.$$

Vergleich ergibt

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha. \quad (8)$$

$\mu = b$ entartet der elliptische Kegel um die z -Achse in einen Sektor mit dem halben Öffnungswinkel β in der xz -Ebene.

Unser elliptisches Kegelkoordinatensystem ist hinsichtlich zur Behandlung der Aufgabe geeignet; um die vorkommenden Flächen (Abb. 1) sind Koordinatenflächen in diesem System.

2. Die Lecher-Welle in einer elliptischen Kegelleitung

a) Berechnung der TEM-Welle in einer elliptischen Kegelleitung

Die Feldgleichungen lauten bei einer Zeitabhängigkeit $e^{-i\omega t}$ im Vakuum

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} H &= -i\omega \varepsilon_0 E, \\ \operatorname{rot} E &= i\omega \mu_0 H, \\ \operatorname{div} H &= 0, \\ \operatorname{div} E &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Die Feldkomponenten kommen E_v und H_μ in Betracht. Nach den allgemeinen Formeln für krummflächige orthogonale Koordinaten (s. [12]) erhalten wir in elliptischen Kegelkoordinaten aus den Maxwell'schen Gleichungen folgende Differentialgleichungen für E_v und H_μ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\mu) = i\omega \varepsilon_0 E_v, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} (\sqrt{\mu^2 - v^2} H_\mu) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_v) = i\omega \mu_0 H_\mu, \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} (\sqrt{\mu^2 - v^2} E_v) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} (\sqrt{\mu^2 - v^2} H_\mu) = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} (\sqrt{\mu^2 - v^2} E_v) = 0. \quad (15)$$

Die Differentialgleichung, die sich aus der Forderung $E_r = 0$ ergibt, ist in diesem System enthalten.

Aus Gl. (13) und (15) folgt

$$E_v = \frac{f(r)}{\sqrt{\mu^2 - v^2}}, \quad (16)$$

$$H_\mu = \frac{g(r)}{\sqrt{\mu^2 - v^2}}. \quad (17)$$

Aus Gl. (10) und (12) folgen schließlich die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r E_v) + \kappa^2 \cdot (r E_v) = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r H_\mu) + \kappa^2 \cdot (r H_\mu) = 0, \quad (19)$$

wobei

$$\kappa^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \quad (20)$$

gesetzt wurde.

Gl. (18) und (19) werden durch eine r -Abhängigkeit der Form $e^{\pm i\kappa r/r}$ erfüllt. Die allgemeine Lösung lautet also mit (16) und (17)

$$E_v = \frac{E_0}{\kappa \sqrt{\mu^2 - v^2}} \left(\frac{e^{i\kappa r}}{r} + p \frac{e^{-i\kappa r}}{r} \right), \quad (21)$$

$$H_\mu = \frac{H_0}{\kappa \sqrt{\mu^2 - v^2}} \left(\frac{e^{i\kappa r}}{r} - p \frac{e^{-i\kappa r}}{r} \right). \quad (22)$$

Aus der Differentialgleichung (10) ergibt sich für das Verhältnis der Konstanten E_0 und H_0 der Wert

$$Z_0 = \frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\Omega. \quad (23)$$

Z_0 ist der Feldwellenwiderstand des freien Raumes; p wollen wir Reflexionskoeffizient nennen.

b) Der Wellenwiderstand der Sektorleitung

Die Feldlinien E_v und H_μ verlaufen auf Kugeloberflächen. Eine jede Kugeloberfläche ist für unsere Lecher-Welle eine induktions- und verschiebungsstromfreie Fläche. Wir können also Spannung und Strom in eindeutiger Weise berechnen.

Die Spannung zwischen zwei Potentialflächen v_1 und v_2 , also zwischen zwei elliptischen Kegeln um die x -Achse, ist das Linienintegral der elektrischen Feldstärke E_v :

$$U = \int_{v_1}^{v_2} E_v ds_v. \quad (24)$$

Den Strom auf unserer elliptischen Kegelleitung berechnen wir aus dem Umlaufintegral der magnetischen Feldstärke H_μ um den Innenleiter:

$$I = \oint H_\mu ds_\mu. \quad (25)$$

Das Verhältnis U/I der auslaufenden Welle ist der Wellenwiderstand der elliptischen Kegelleitung.

$$Z = \frac{\int_{v_1}^{v_2} E_v ds_v}{\oint H_\mu ds_\mu}. \quad (26)$$

Hier wollen wir speziell den Wellenwiderstand Z einer elliptischen Kegelleitung berechnen, bei der der Innenleiter zu einem Sektor vom Öffnungswinkel 2α und der Außenleiter zu einer Ebene entartet ist (Abb. 1). Wir setzen dazu den ersten Summanden aus Gl. (21) bzw. (22) in Gl. (24) bzw. (25) ein. Die Linienelemente

$d s_\nu$ und $d s_\mu$ sind aus (6) zu entnehmen. Wir erhalten

$$U = \frac{E_0}{\kappa} e^{i\kappa r} \int_b^0 \frac{d\nu}{\sqrt{(b^2 - \nu^2)(a^2 - \nu^2)}},$$

$$I = 4 \frac{H_0}{\kappa} e^{i\kappa r} \int_a^b \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(a^2 - \mu^2)}},$$

also

$$Z = \frac{Z_0}{4} \frac{\int_0^b \frac{d\nu}{\sqrt{(b^2 - \nu^2)(a^2 - \nu^2)}}}{\int_b^a \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(a^2 - \mu^2)}}}.$$

Wir formen $\int_0^b \frac{d\nu}{\sqrt{(b^2 - \nu^2)(a^2 - \nu^2)}}$ unter Einführung einer neuen Variablen $t = \nu/b$ um. Bei Berücksichtigung von

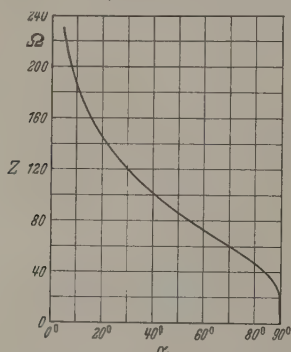


Abb. 4. Wellenwiderstand sektorförmiger Flächenantennen

$b/a = \cos \alpha$ erhalten wir

$$\int_0^b \frac{d\nu}{\sqrt{(b^2 - \nu^2)(a^2 - \nu^2)}} = \frac{1}{a} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - \frac{b^2}{a^2} t^2)}} = \frac{1}{a} K(\cos \alpha).$$

Dabei ist $K(\cos \alpha)$ das vollständige elliptische Integral erster Gattung mit dem Modul $\cos \alpha$.

Mit der Substitution

$$s^2 = \frac{1 - \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{\mu}{b}\right)^2}{\left(\frac{\mu}{b}\right)^2 - \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{\mu}{b}\right)^2}$$

findet man ferner

$$\int_b^a \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(a^2 - \mu^2)}} = \frac{1}{a} K(\sin \alpha).$$

Dabei ist wieder $K(\sin \alpha)$ das vollständige elliptische Integral erster Gattung mit dem Modul $\sin \alpha$.

Folglich ist

$$Z = 30\pi \frac{K(\cos \alpha)}{K(\sin \alpha)} \Omega. \quad (27)$$

der Wellenwiderstand der unsymmetrischen Sektorleitung. Wir wollen stattdessen auch vom Wellenwiderstand der Kreissektor-Antenne sprechen. Der

Wellenwiderstand der entsprechenden symmetrischen Leitung ist doppelt so groß.

In Abb. 4 ist Z als Funktion von α aufgetragen.

Eine entsprechende Formel ist bereits von ARLT [6] über die Lösung der Potentialgleichung abgeleitet worden, die dasselbe liefert.

Zu den Darstellungen (21) und (22) ist noch folgendes zu bemerken: E_ν und H_μ werden (abgesehen von $r=0$) singular für $r=\mu=b$, d. h., gerade an den Kanten des Sektors. Die Funktion $\frac{1}{r\sqrt{\mu^2 - \nu^2}}$ ist aber auf einer Kugeloberfläche $r=r_0$ quadratisch integrierbar:

$$\begin{aligned} & \int_{\text{Kugeloberfläche}} r^2 (\mu^2 - \nu^2) \\ &= 8 \int_0^b d\nu \int_b^a d\mu \frac{1}{\sqrt{(b^2 - \nu^2)(a^2 - \nu^2)} \sqrt{(\mu^2 - b^2)(a^2 - \mu^2)}} \\ &= \frac{8}{a^2} K(\cos \alpha) K(\sin \alpha). \end{aligned}$$

Sie kann somit dort nach einem vollständigen orthogonalen Funktionensystem entwickelt werden.

3. Kugelwellen elektrischen und magnetischen Typs in elliptischen Kegelkoordinaten

a) Berechnung der Kugelwelle elektrischen Typs im Strahlungsraum

Im Innenraum der Leitung haben wir uns auf die TEM-Welle festgelegt. Insbesondere läuft die Komponente H_μ auf Kreisperipherien direkt um den Sektor herum. Der Vektor der Stromdichte auf der Antenne kann deshalb bei dieser Beschränkung auf die TEM-Welle auch nur eine radiale Komponente besitzen. Dann hat aber der Hertzsche Vektor P im Außenraum der Leitung auch nur eine von Null verschiedene Komponente P_r .

Zur Lösung der Maxwell'schen Gleichungen

$$\text{rot } H = -i\omega \epsilon_0 E, \quad (28a)$$

$$\text{rot } E = i\omega \mu_0 H, \quad (28b)$$

$$\text{div } H = 0, \quad (29a)$$

$$\text{div } E = 0 \quad (29b)$$

machen wir den Ansatz

$$H = -i\omega \epsilon_0 \text{rot } P \quad (30)$$

mit $P = (P_r, 0, 0)$. Dann folgt aus Gl. (28b)

$$\text{rot } E = \kappa^2 \text{rot } P,$$

also

$$E = \kappa^2 P + \text{grad } u, \quad (31)$$

da ja die Rotation eines Gradienten verschwindet.

Durch den Ansatz (30) ist $\text{div } H = 0$ erfüllt. Wir bestimmen jetzt den Zusammenhang zwischen der skalaren Funktion u und der Komponente P_r des Hertzschen Vektors aus der ersten Maxwell'schen Gl. (28a). Dann ist auch $\text{div } E = 0$ erfüllt. Dazu setzen wir (30) und (31) in Gl. (28a) ein. Wir erhalten

$$\kappa^2 P + \text{grad } u - \text{rot rot } P = 0. \quad (32)$$

Vektorgleichung (32) zerlegen wir in die drei Komponentenungleichungen

$$\left. \begin{aligned} & + \frac{\sqrt{(b^2 - v^2)(a^2 - \mu^2)}}{r^2(\mu^2 - v^2)} \frac{\partial}{\partial v} \left(\sqrt{(b^2 - v^2)(a^2 - \mu^2)} \frac{\partial P_r}{\partial v} \right) + \\ & + \frac{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(a^2 - \mu^2)}}{r^2(\mu^2 - v^2)} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\sqrt{(\mu^2 - b^2)(a^2 - \mu^2)} \frac{\partial P_r}{\partial \mu} \right) + \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$- \kappa^2 P_r = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial v} - \frac{\partial^2 P_r}{\partial r \partial v} = 0, \quad (34)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mu} - \frac{\partial^2 P_r}{\partial r \partial \mu} = 0. \quad (35)$$

beiden letzten Gleichungen sind erfüllt für

$$u = \frac{\partial P_r}{\partial r}. \quad (36)$$

Wir setzen

$$P_r = r w. \quad (37)$$

Es ist also

$$u = \frac{\partial(r w)}{\partial r}.$$

Wir führen dies in Gl. (33) ein, die wir vorher noch mit r dividieren. Wegen

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(r w)}{\partial r^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial w}{\partial r} \right)$$

so daß man

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \\ & \frac{\sqrt{(b^2 - v^2)(a^2 - \mu^2)}}{r^2(\mu^2 - v^2)} \frac{\partial}{\partial v} \left(\sqrt{(b^2 - v^2)(a^2 - \mu^2)} \frac{\partial w}{\partial v} \right) + \\ & \frac{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(a^2 - \mu^2)}}{r^2(\mu^2 - v^2)} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\sqrt{(\mu^2 - b^2)(a^2 - \mu^2)} \frac{\partial w}{\partial \mu} \right) + \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

$$- \kappa^2 w = 0.$$

Das ist aber gerade die in elliptischen Kugelkoordinaten beschriebene Wellengleichung für die skalare Funktion w . Der Ansatz

$$w = R(r) Y(v; \mu) \quad (39)$$

führt mit der Separationskonstanten q zu den folgenden Differentialgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\sqrt{(b^2 - v^2)(a^2 - \mu^2)}}{r^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\sqrt{(b^2 - v^2)(a^2 - \mu^2)} \frac{\partial Y(v; \mu)}{\partial v} \right) + \\ & + \frac{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(a^2 - \mu^2)}}{r^2} \times \\ & \times \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\sqrt{(\mu^2 - b^2)(a^2 - \mu^2)} \frac{\partial Y(v; \mu)}{\partial \mu} \right) - \\ & - q(\mu^2 - v^2) Y(v; \mu) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + (\kappa^2 r^2 + q) R(r) = 0. \quad (41)$$

Zur Differentialgleichung (40)

Die Funktionen $Y(v; \mu)$ sind Funktionen auf einer Kugeloberfläche. Eine Transformation der Differentialgleichung (40) auf Kugelkoordinaten ϑ und φ führt uns zur Differentialgleichung der Kugelflächenfunktionen $\tilde{Y}(\vartheta; \varphi)$. Hieraus erklärt sich, daß wir nur dann zu auf der ganzen Kugeloberfläche regulären

Lösungen $Y(v; \mu)$ gelangen, wenn wir der Separationskonstanten q den Wert $-n(n+1)$ geben, wobei $n=0; 1; 2; 3; \dots$ sein kann. Die regulären Funktionen $Y(v; \mu)$ sind äquivalent den regulären Kugelflächenfunktionen $\tilde{Y}(\vartheta; \varphi)$. Man kann über die Transformation der Glieder $\cos \vartheta$, $\sin \vartheta \cdot \sin \varphi$ und $\sin \vartheta \cdot \cos \varphi$ der Kugelflächenfunktionen nach den Formeln (1) zu einer Darstellung der „Laméschen Produkte“ $Y(v; \mu)$ gelangen (s. HEINE [10] und HOBSON [11]). Der Separationsansatz

$$Y(v; \mu) = F_1(v) \cdot F_2(\mu) \quad (42)$$

führt uns mit der Separationskonstanten $-p(b^2 + a^2)$ von der Differentialgleichung (40) zu den folgenden Differentialgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} & \sqrt{(b^2 - v^2)(a^2 - v^2)} \frac{d}{dv} \left(\sqrt{(b^2 - v^2)(a^2 - v^2)} \frac{dF_1(v)}{dv} \right) + \\ & + [p(b^2 + a^2) - n(n+1)v^2] F_1(v) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

$$\left. \begin{aligned} & - \sqrt{(\mu^2 - b^2)(a^2 - \mu^2)} \frac{d}{d\mu} \left(\sqrt{(\mu^2 - b^2)(a^2 - \mu^2)} \frac{dF_2(\mu)}{d\mu} \right) + \\ & + [p(b^2 + a^2) - n(n+1)\mu^2] F_2(\mu) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Man erhält also zwei genau gleiche Differentialgleichungen, die sich nur durch das Symbol v bzw. μ voneinander unterscheiden. Im folgenden soll daher der Index 1 bzw. 2 weggelassen werden. Man nennt Gl. (43) bzw. (44) „Lamésche Differentialgleichung“. Die Konstante p ist zunächst willkürlich, so daß es also in einer unendlichen Anzahl von Wegen möglich ist, Lösungen der Differentialgleichungen (43) bzw. (44) zu finden. Man kann aber für positive ganze Werte von n die Konstante p so wählen, daß die Funktionen $F(v)$ bzw. $F(\mu)$ Polynome werden, die für den gesamten Wertebereich von v bzw. μ endlich sind. Es gibt für jedes positive ganze n jeweils $2n+1$ solcher Polynome. Die $2n+1$ Polynome $F_n(\mu)$ lassen sich für jedes positive ganze n in folgende vier Klassen einteilen:

$$\left. \begin{aligned} & K_n(\mu) = c_0 \mu^n + c_1 \mu^{n-2} + c_2 \mu^{n-4} + \dots, \\ & L_n(\mu) = \sqrt{\mu^2 - b^2} (c_0 \mu^{n-1} + c_1 \mu^{n-3} + \dots), \\ & M_n(\mu) = \sqrt{a^2 - \mu^2} (c_0 \mu^{n-1} + c_1 \mu^{n-3} + \dots), \\ & N_n(\mu) = \sqrt{(\mu^2 - b^2)(a^2 - \mu^2)} (c_0 \mu^{n-2} + c_1 \mu^{n-4} + \dots). \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Dasselbe gilt für die Polynome $K_n(v)$, $L_n(v)$, $M_n(v)$ und $N_n(v)$, wobei die Wurzeln stets so zu schreiben sind, daß sie reelle Werte im gesamten Bereich von v bzw. μ besitzen. Wir wollen schließlich durch einen zweiten Index s diejenigen Polynome unterscheiden, die bei festgehaltenem n zu einer Klasse gehören. Wegen (37), (39) und (42) wird sich also die Vektorkomponente P_r , abgesehen vom Radialanteil, als eine Linearkombination der folgenden „Laméschen Produkte“ ergeben:

$$\left. \begin{aligned} & K_n^s(v) K_n^s(\mu), \\ & L_n^s(v) L_n^s(\mu), \\ & M_n^s(v) M_n^s(\mu), \\ & N_n^s(v) N_n^s(\mu). \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Es ist also in einer Reihenentwicklung nach Laméschen Produkten

$$\sum_n \sum_s C_n^s F_n^s(v) F_n^s(\mu)$$

jedes Produkt $E_n^s(v) \cdot E_n^s(\mu)$ so zu verstehen, daß $E_n^s(v)$ stets genau dieselbe Funktion ist wie $E_n^s(\mu)$, daß also keine Glieder

$$\begin{aligned} K_n^s(v) K_n^s(\mu), & K_n^s(v) K_n^s(\mu), \\ K_n^s(v) L_n^s(\mu), & K_n^s(v) M_n^s(\mu), \dots \end{aligned}$$

mit $n \neq n'$ bzw. $s \neq s'$ vorkommen. Bei festem n sind die $2n+1$ Produkte (46) voneinander linear unabhängig.

Die Laméschen Produkte stellen im übrigen ein vollständiges orthogonales Funktionensystem dar. Soll eine gegebene Funktion $f(v; \mu)$ nach Laméschen Produkten entwickelt werden, so hat man sie vorher zu zerlegen in Teile, die den Laméschen Produkten der vier Klassen in ihrer Form entsprechen. Jeder dieser Teile von $f(v; \mu)$ wird dann gerade nach Produkten einer dieser vier Klassen entwickelt (s. HEINE [10] und HOBSON [11]).

Die Vektorkomponente P_r wird also in unserem Fall in bezug auf ihren Winkelanteil zunächst dargestellt werden durch eine Linearkombination aller Laméschen Produkte:

$$\left. \begin{aligned} & K_n^s(v) K_n^s(\mu), \\ & \left\{ \begin{aligned} & b^2 - v^2 \left\{ \mu^2 - b^2 S_{n-1}^s(v) S_{n-1}^s(\mu), \right. \\ & \left. \left[a^2 - v^2 \right] \left[a^2 - \mu^2 \right] T_{n-1}^s(v) T_{n-1}^s(\mu), \right. \\ & \left. \left[(b^2 - v^2)(a^2 - v^2) \right] \left[(\mu^2 - b^2)(a^2 - \mu^2) \right] \times \right. \\ & \left. \left. \times U_{n-2}^s(v) U_{n-2}^s(\mu) \right\} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Dabei sind K, S, T, U reine Polynome von v bzw. μ . Die Faktoren vor diesen Polynomen können wir nach den Transformationsformeln (1) in Kugelkoordinaten anschreiben; bis auf Konstanten also:

$$\left. \begin{aligned} & K_n^s(v) K_n^s(\mu), \\ & \left\{ \begin{aligned} & \sin \vartheta \cos \varphi S_{n-1}^s(v) S_{n-1}^s(\mu), \\ & \sin \vartheta \sin \varphi T_{n-1}^s(v) T_{n-1}^s(\mu), \\ & \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi U_{n-2}^s(v) U_{n-2}^s(\mu). \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Aus Symmetriegründen muß aber der Hertzsche Vektor unseres Problems folgender Forderung genügen: Er muß, wie die TEM-Welle im Innenraum der Leitung, in allen vier Oktanten des betrachteten Halbraumes außerhalb der Kugelhalbkugel $r=r_0$ (Abb. 1) gleich aufgebaut sein, d.h., er muß invariant sein gegenüber Spiegelungen an den beiden Symmetrieebenen des Kreissektors. Da die Exponenten zweier aufeinanderfolgender Glieder in den Polynomen K, S, T, U sich jeweils um zwei Einheiten unterscheiden, stehen in den Produkten

$$\begin{aligned} & K_n^s(v) \cdot K_n^s(\mu), & S_{n-1}^s(v) \cdot S_{n-1}^s(\mu), \\ & T_{n-1}^s(v) \cdot T_{n-1}^s(\mu), & U_{n-2}^s(v) \cdot U_{n-2}^s(\mu) \end{aligned}$$

nur Glieder der Form

$$(v\mu)^j (v^{2k} + \mu^{2k}).$$

Aus den Transformationsformeln (1) erhält man aber leicht

$$v\mu = ba \cos \vartheta,$$

$$v^2 + \mu^2 = a^2 \left[\left(1 + \frac{b^2}{a^2} \right) - \left(\sin^2 \varphi + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \varphi \right) \sin^2 \vartheta \right].$$

Man erkennt also sofort, daß die zuletzt angeschriebenen Produkte invariant sind gegenüber Spiege-

lungen der oben erwähnten Art. Dieser Forderung genügen dagegen die Faktoren $\sin \varphi, \cos \varphi$ und $\sin \varphi \cdot \cos \varphi$ in (48) nicht. Wir ziehen daraus den Schluß, daß der Hertzsche Vektor unseres Problems im Außenraum in bezug auf seinen Winkelanteil nur aus Laméschen Produkten vom Typ $K_n^s(v) \cdot K_n^s(\mu)$ aufgebaut werden darf.

Für geradzahliges n findet man $\frac{n}{2} + 1$ Funktionen der Klasse K . Für ungeradzahliges n findet man $\frac{1}{2}(n+1)$ Funktionen der Klasse K .

Zur Differentialgleichung (41)

Mit $q = -n(n+1)$ lautet Gl. (41):

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + (\kappa^2 r^2 - n(n+1)) R(r) = 0.$$

Das ist aber gerade die Differentialgleichung der halbzahligten sphärischen Zylinderfunktionen. Da uns nun ins Unendliche auslaufende Wellen interessieren kommen bei einer Zeitabhängigkeit $e^{-i\omega t}$ nur sphärische Hankel-Funktionen erster Art in Frage

$$\begin{aligned} & H_{n-\frac{1}{2}}^1(\kappa r) \\ & \sqrt{\kappa r} \end{aligned}$$

Damit ist gleichzeitig die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung erfüllt.

Die hier allein interessierende Lösung der Wellengleichung

$$\Delta w + \kappa^2 w = 0$$

lautet also wegen (39):

$$w = \frac{1}{\kappa} \sum_n \sum_s C_n^s \frac{H_{n-\frac{1}{2}}^1(\kappa r)}{\sqrt{\kappa r}} K_n^s(v) K_n^s(\mu).$$

Die Koeffizienten C_n^s sind zunächst unbekannt. Aus

Zweckmäßigkeitsgründen ist die Konstante $\frac{1}{\kappa}$ vor die Doppelsumme gezogen worden.

Wegen $P_r = rw$ findet man also

$$P_r = \frac{\sqrt{\pi}}{\kappa} \sum_n \sum_s C_n^s \sqrt{\frac{r}{\kappa}} H_{n+\frac{1}{2}}^1(\kappa r) K_n^s(v) K_n^s(\mu). \quad (49)$$

Die Komponenten des elektromagnetischen Feldes folgen hiermit bei Berücksichtigung von (36) aus (30) und (31). Wir berechnen zunächst die Komponente E_r

$$\begin{aligned} E_r &= \kappa^2 P_r + \text{grad}_r u \\ &= \kappa^2 P_r + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial P_r}{\partial r} \right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\kappa} \sum_n \sum_s C_n^s \left[\kappa^2 \sqrt{\frac{r}{\kappa}} H_{n+\frac{1}{2}}^1(\kappa r) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d^2}{dr^2} \left(\sqrt{\frac{r}{\kappa}} H_{n+\frac{1}{2}}^1(\kappa r) \right) \right] K_n^s(v) K_n^s(\mu) \end{aligned}$$

E_r muß auf der unendlich gut leitenden Grundebene d.h. für $v=0$, verschwinden. $K_n^s(v)$ ist nun für geradzahliges n eine gerade Funktion von v und für ungeradzahliges n eine ungerade Funktion von v . Wir erfüllen also die Randbedingung, wenn wir nur über ungerade n

minieren. P_r lautet also schließlich:

$$P_r = \frac{\sqrt{\pi}}{\kappa} \sum_{n=1;3;5}^{\infty} \sum_{s=1}^{\frac{1}{2}(n+1)} C_n^s \sqrt{\frac{r}{\kappa}} H_{n+\frac{1}{2}}^1(\kappa r) K_n^s(r) K_n^s(\mu). \quad (50)$$

Hermit berechnen wir die Feldkomponente E_r

$$\left. \begin{aligned} &= \text{grad}_r u = \sqrt{\frac{(b^2 - v^2)(a^2 - v^2)}{r^2(\mu^2 - v^2)}} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial P_r}{\partial r} \right) \\ &= \sqrt{\frac{(b^2 - v^2)(a^2 - v^2)}{\mu^2 - v^2}} \sum_{n=1;3;5}^{\infty} \sum_{s=1}^{\frac{1}{2}(n+1)} C_n^s \frac{\sqrt{\pi}}{\kappa r} \times \\ &\quad \times \frac{d}{d(\kappa r)} \left(\sqrt{\kappa r} H_{n+\frac{1}{2}}^1(\kappa r) \right) \frac{dK_n^s(v)}{dv} K_n^s(\mu) \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

und die Feldkomponente H_μ

$$\left. \begin{aligned} &= -i\omega \varepsilon_0 \text{rot}_\mu P = i\omega \varepsilon_0 \sqrt{\frac{(b^2 - v^2)(a^2 - v^2)}{r^2(\mu^2 - v^2)}} \frac{\partial P_r}{\partial v} \\ &= i \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \sqrt{\frac{(b^2 - v^2)(a^2 - v^2)}{\mu^2 - v^2}} \times \\ &\quad \times \sum_{n=1;3;5}^{\infty} \sum_{s=1}^{\frac{1}{2}(n+1)} C_n^s \sqrt{\frac{\pi}{2\kappa r}} H_{n+\frac{1}{2}}^1(\kappa r) \frac{dK_n^s(v)}{dv} K_n^s(\mu). \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Dabei wurde nach Gl. (20) $\kappa^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$ gesetzt.

Es gilt nun allgemein für Zylinderfunktionen
SOMMERFELD [14])

$$\frac{dZ_k(x)}{dx} = Z_{k-1}(x) - \frac{k}{x} Z_k(x).$$

Damit wird hier

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left(\sqrt{x} H_{n+\frac{1}{2}}^1(x) \right) &= \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{dH_{n+\frac{1}{2}}^1(x)}{dx} + \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} H_{n+\frac{1}{2}}^1(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} H_{n-\frac{1}{2}}^1(x) - \frac{n}{x^{\frac{3}{2}}} H_{n+\frac{1}{2}}^1(x). \end{aligned}$$

Wir setzen

$$h_n^1(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{n+\frac{1}{2}}^1(x).$$

Dann ist also

$$\frac{\sqrt{\pi}}{x} \frac{d}{dx} \left(\sqrt{x} H_{n+\frac{1}{2}}^1(x) \right) = h_{n-1}^1(x) - \frac{n}{x} h_n^1(x). \quad (53)$$

In dem Buch von MORSE und FESHBACH [15] sind die Funktionen $h_n^1(x)$ nach Betrag und Phase tabelliert. In dieser Arbeit dagegen wurden zur numerischen Auswertung die Tabellen des U.S. National Bureau of Standards [16] benutzt.

Wir schreiben jetzt:

$$\left. \begin{aligned} E_v &= \sqrt{\frac{(b^2 - v^2)(a^2 - v^2)}{\mu^2 - v^2}} \times \\ &\quad \times \sum_{n=1;3;5}^{\infty} \sum_{s=1}^{\frac{1}{2}(n+1)} C_n^s \left[h_{n-1}^1(\kappa r) - \frac{n}{\kappa r} h_n^1(\kappa r) \right] \times \\ &\quad \times \frac{dK_n^s(v)}{dv} K_n^s(\mu), \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

$$\left. \begin{aligned} H_\mu &= \frac{i}{Z_0} \sqrt{\frac{(b^2 - v^2)(a^2 - v^2)}{\mu^2 - v^2}} \times \\ &\quad \times \sum_{n=1;3;5}^{\infty} \sum_{s=1}^{\frac{1}{2}(n+1)} C_n^s h_n^1(\kappa r) \frac{dK_n^s(v)}{dv} K_n^s(\mu). \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

b) Die E-Wellen und H-Wellen der Sektorleitung

Wir sind nun in der Lage, neben der bereits bekannten TEM-Welle die Wellen elektrischen bzw. magnetischen Typs — also Wellen mit einer elektrischen bzw. magnetischen Feldkomponente in Fortschrittsrichtung — im Innengebiet der Sektorleitung anzugeben (Abb. 1). Bei einer Erweiterung der Theorie sind sie zur vollständigen Beschreibung der Feldverteilung in der Aperturfläche $r = r_0$ neben der TEM-Welle heranzuziehen.

E-Wellen

Zu den Wellen elektrischen Typs, auch E-Wellen genannt, gelangen wir wie in Gl. (30) bzw. (31), indem wir setzen:

$$H = -i\omega \varepsilon_0 \text{rot } P,$$

$$E = \kappa^2 P + \text{grad } \frac{\partial P_r}{\partial r}.$$

Dabei ist $P = (P_r, 0, 0)$ der elektrische Strahlungsvektor. Wir wollen stehende Wellen in der Sektorleitung erhalten, die außerdem im Nullpunkt nicht singulär werden. An die Stelle halbzahliger sphärischer Hankel-Funktionen treten jetzt sphärische Bessel-Funktionen mit halbzahligem Index als Lösungen der Differentialgleichung (41). Wir finden wie in (49)

$$P_r = \frac{\sqrt{\pi}}{\kappa} \sum_n \sum_s C_n^s \sqrt{\frac{r}{\kappa}} J_{n+\frac{1}{2}}(\kappa r) F_n^s(v) \cdot F_n^s(\mu).$$

Dabei sollen mit $F_n^s(v) \cdot F_n^s(\mu)$ die Laméschen Produkte bezeichnet werden. Die Feldkomponenten lauten dann

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{\sqrt{\pi}}{\kappa} \sum_n \sum_s C_n^s \left[\kappa^2 \sqrt{\frac{r}{\kappa}} J_{n+\frac{1}{2}}(\kappa r) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d^2}{dr^2} \left(\sqrt{\frac{r}{\kappa}} J_{n+\frac{1}{2}}(\kappa r) \right) \right] F_n^s(v) F_n^s(\mu), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_v &= \sqrt{\frac{(b^2 - v^2)(a^2 - v^2)}{\mu^2 - v^2}} \times \\ &\quad \times \sum_n \sum_s C_n^s \left[j_{n-1}(\kappa r) - \frac{n}{\kappa r} j_n(\kappa r) \right] \frac{dF_n^s(v)}{dv} F_n^s(\mu), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_\mu &= \sqrt{\frac{(\mu^2 - b^2)(a^2 - \mu^2)}{\mu^2 - v^2}} \times \\ &\quad \times \sum_n \sum_s C_n^s \left[j_{n-1}(\kappa r) - \frac{n}{\kappa r} j_n(\kappa r) \right] F_n^s(v) \frac{dF_n^s(\mu)}{d\mu}, \end{aligned}$$

$$H_r = 0,$$

$$\begin{aligned} H_v &= -\frac{i}{Z_0} \sqrt{\frac{(\mu^2 - b^2)(a^2 - \mu^2)}{\mu^2 - v^2}} \times \\ &\quad \times \sum_n \sum_s C_n^s j_n(\kappa r) F_n^s(v) \frac{dF_n^s(\mu)}{d\mu}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_\mu &= \frac{i}{Z_0} \sqrt{\frac{(b^2 - v^2)(a^2 - v^2)}{\mu^2 - v^2}} \times \\ &\quad \times \sum_n \sum_s C_n^s j_n(\kappa r) \frac{dF_n^s(v)}{dv} F_n^s(\mu), \end{aligned}$$

$$\text{mit } j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+\frac{1}{2}}(x).$$

Randbedingungen

Die Feldkomponenten E_r und E_μ müssen auf den Leiteroberflächen $v=0$ und $v=b$ verschwinden, da das elektrische Feld immer senkrecht auf unendlich gut leitenden Flächen steht. Ebenso muß H_v für $v=0$ und $v=b$ verschwinden, da magnetische Feldlinien nicht auf Leiteroberflächen entspringen können.

Um diese Randbedingungen zu erfüllen, untersuchen wir zunächst die Laméschen Polynome

$$K_n^s(v) = c_0 v^n + c_1 v^{n-2} + c_2 v^{n-4} + \dots,$$

$$L_n^s(v) = \sqrt{b^2 - v^2} S_{n-1}^s(v),$$

$$M_n^s(v) = \sqrt{a^2 - v^2} T_{n-1}^s(v),$$

$$N_n^s(v) = \sqrt{(b^2 - v^2)(a^2 - v^2)} U_{n-2}^s(v).$$

Die Polynome $K_n^s(v)$, $S_{n-1}^s(v)$, $T_{n-1}^s(v)$, $U_{n-2}^s(v)$ sind reine Polynome von v . Der untere Index gibt ihren Grad an. Man kann nun allgemein zeigen (s. HEINE [10] oder HOBSON [11]), daß die Polynome $K_n^s(v)$, $S_{n-1}^s(v)$, $T_{n-1}^s(v)$, $U_{n-2}^s(v)$ für $v=b$ nicht verschwinden. Die oben angeschriebenen Randbedingungen werden dann aber nur in folgenden zwei Fällen erfüllt:

1. Die E -Wellen werden aufgebaut aus Laméschen Produkten vom Typ $L_n^s(v) \cdot L_n^s(\mu)$ mit geradzahligem n . Es gibt zu jedem geradzahligem n jeweils $n/2$ solcher Produkte.

2. Die E -Wellen werden aufgebaut aus Laméschen Produkten vom Typ $N_n^s(v) \cdot N_n^s(\mu)$ mit ungeradzahligem n . Es gibt zu jedem ungeradzahligem n jeweils $\frac{1}{2}(n-1)$ solcher Produkte.

 H -Wellen

Der Ansatz eines magnetischen Strahlungsvektors $Q = (Q_r, 0, 0)$ liefert ein Feld mit $E_r = 0$. Wir setzen

$$Q_r = r w'.$$

Wenn w' der Wellengleichung

$$\Delta w' + \kappa^2 w' = 0$$

genügt, dann erfüllen

$$H = -\frac{1}{Z_0} \left(\kappa^2 Q + \text{grad} \frac{\partial Q_r}{\partial r} \right)$$

und

$$E = -i Z_0 \omega \varepsilon_0 \text{rot } Q$$

die Maxwell'schen Gleichungen, wie man durch Einsetzen erkennt. Wir erhalten wieder

$$Q_r = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\kappa} \sum_n \sum_s C_n^s \sqrt{\frac{r}{\kappa}} J_{n+\frac{1}{2}}(\kappa r) F_n^s(v) F_n^s(\mu).$$

Die Feldkomponenten lauten

$$H_r = -\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\kappa Z_0} \sum_n \sum_s C_n^s \left[\kappa^2 \sqrt{\frac{r}{\kappa}} J_{n+\frac{1}{2}}(\kappa r) + \frac{d^2}{dr^2} \left(\sqrt{\frac{r}{\kappa}} J_{n+\frac{1}{2}}(\kappa r) \right) \right] F_n^s(v) F_n^s(\mu),$$

$$H_v = -\frac{1}{Z_0} \sqrt{\frac{(b^2 - v^2)(a^2 - v^2)}{\mu^2 - v^2}} \times \\ \times \sum_n \sum_s C_n^s \left[j_{n-1}(\kappa r) - \frac{n}{\kappa r} j_n(\kappa r) \right] \frac{dF_n^s(v)}{dv} F_n^s(\mu),$$

$$H_\mu = -\frac{1}{Z_0} \sqrt{\frac{(\mu^2 - b^2)(a^2 - \mu^2)}{\mu^2 - v^2}} \times \\ \times \sum_n \sum_s C_n^s \left[j_{n-1}(\kappa r) - \frac{n}{\kappa r} j_n(\kappa r) \right] F_n^s(v) \frac{dF_n^s(\mu)}{d\mu}$$

$$E_r = 0,$$

$$E_v = -i \sqrt{\frac{(\mu^2 - b^2)(a^2 - \mu^2)}{\mu^2 - v^2}} \times \\ \times \sum_n \sum_s C_n^s j_n(\kappa r) F_n^s(v) \frac{dF_n^s(\mu)}{d\mu}$$

$$E_\mu = i \sqrt{\frac{(b^2 - v^2)(a^2 - v^2)}{\mu^2 - v^2}} \sum_n \sum_s C_n^s j_n(\kappa r) \frac{dF_n^s(v)}{dv} F_n^s(\mu)$$

Randbedingungen

Die Feldkomponenten E_μ und H_v müssen auf den Leiteroberflächen $v=0$ und $v=b$ verschwinden.

Die Randbedingungen werden nur in den beiden folgenden Fällen erfüllt:

1. Die H -Wellen werden aufgebaut aus Laméschen Produkten vom Typ $M_n^s(v) \cdot M_n^s(\mu)$ mit ungeradzahligem n . Es gibt zu jedem ungeradzahligem n jeweils $\frac{1}{2}(n+1)$ solcher Produkte.

2. Die H -Wellen werden aufgebaut aus Laméschen Produkten vom Typ $K_n^s(v) \cdot K_n^s(\mu)$ mit geradzahligem n . Es gibt zu jedem geradzahligem n jeweils $\frac{n}{2} + 1$ solcher Produkte.

Wir werden in dieser Arbeit keinen weiteren Gebrauch von den Ergebnissen dieses Abschnitts machen haben aber einen tieferen Einblick in die Struktur des elektromagnetischen Feldes unseres Problems gewonnen.

c) Entartung der Laméschen Differentialgleichung

Wenn wir $b \rightarrow a$, also $\alpha \rightarrow 0^\circ$, gehen lassen, werden die elliptischen Kegel $v = \text{const}$ zu rotationssymmetrischen Kegeln um die x -Achse. Insbesondere geht die Lamésche Differentialgleichung (43) für die Funktion $F(v)$ mit der Transformation

$$\frac{v}{a} = \cos \vartheta$$

und mit der Substitution

$$\xi = \cos \vartheta$$

über in

$$(1 - \xi^2)^2 \frac{d^2 F(\xi)}{d\xi^2} + 2\xi(\xi^2 - 1) \frac{dF(\xi)}{d\xi} + \\ + [2p - n(n+1)\xi^2] F(\xi) = 0.$$

Für

$$2p = n(n+1) - m^2$$

$$n = 0; 1; 2; 3; \dots \quad -n \leq m \leq +n$$

ist das aber die Differentialgleichung der zugeordneten Kugelfunktionen

$$(1 - \xi^2) \frac{d^2 P_n^m(\xi)}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dP_n^m(\xi)}{d\xi} + \\ + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right] P_n^m(\xi) = 0.$$

lassen wir b und μ so gegen a gehen, daß

$$\sqrt{\frac{a^2 - \mu^2}{a^2 - b^2}} = \sin \varphi \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{\mu^2 - b^2}{a^2 - b^2}} = \cos \varphi$$

rd, so entartet die Lamésche Differentialgleichung (4) für die Funktion $F(\mu)$ mit dem oben angegebenen Wert von $2p$ in die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + m^2 \Phi(\varphi) = 0.$$

an wird also die Komponente P_r des Hertzschen Vektors in ihrem Winkelanteil jetzt entwickeln nach ugelflächenfunktionen

$$P_n^m(\cos \vartheta) \cdot e^{im\varphi}.$$

a im Falle $b=a$ die elliptischen Kegel $v=\text{const}$ zu rotationssymmetrischen Kegeln $\vartheta=\text{const}$ werden, arf in der Lösung keine φ -Abhängigkeit vorhanden

sein. Wir setzen $m=0$ und gelangen so zu einer Entwicklung nach zonalen Kugelfunktionen

$$P_r = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\kappa} \sum_{n=1;3;5}^{\infty} C_n \sqrt{\frac{r}{\kappa}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(\kappa r) \cdot P_n(\cos \vartheta).$$

Diese Entwicklung wird von PAPAS u. KING [8] bei der Theorie der rotationssymmetrischen Kegelantenne benutzt. Die allgemeinere Entwicklung nach Laméschen Produkten läßt jetzt auch die Behandlung von Kegelantennen mit elliptischem Querschnitt zu. Einen Grenzfall dieser Kegelantennen mit elliptischem Querschnitt stellt die Kreissektor-Antenne dar.

(Fortsetzung folgt in Heft 2, 1960)

SIEGFRIED BLUME,
Institut für angewandte Physik der Universität Marburg

Buchbesprechungen

Mitteilungen aus den Forschungslaboratorien der AGFA Leverkusen-München. Bd. I. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1955. 338 S. u. 221 Abb. Gzl. DM 48.—. Bd. II. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1958. 339 S., 263 Abb. u. 2 Tafeln. Gzl. DM 54.—.

Mit den „Mitteilungen“ setzen die Forschungslaboratorien der AGFA in Leverkusen und München die im Jahre 1930 begonnene Tradition fort, von Zeit zu Zeit die wesentlichsten Forschungsergebnisse der AGFA-Laboratorien der Öffentlichkeit mitzuteilen. Der gegenüber früheren Bänden geänderte Name zeigt, daß es zugleich auch ein Neubeginn ist. Nach Kriegsende standen der AGFA in Westdeutschland keine Forschungslaboratorien zur Verfügung, und erst nach Lösung vordringlicher Aufgaben konnten wissenschaftliche Arbeiten durchgeführt werden. Die beiden nun vorliegenden, von Prof. H. FRIESER herausgegebenen Bände zeigen in eindrucksvoller Weise, in welcher Breite bei der AGFA heute wieder Forschungen durchgeführt werden.

Band I (25 Einzelbeiträge) wird eingeleitet mit einem kritischen Überblick über die bis zu jener Zeit (1955) vorliegenden Anschauungen über den photographischen Elementarprozeß (H. FRIESER, E. KLEIN). Es folgen drei Beiträge über Untersuchungen (unter anderem elektronenmikroskopischer Art) an Emulsionen. Weitere vier Beiträge sind vorwiegend chemischen Fragen (organische Farbstoffe, Entwicklung) gewidmet. Ein interessanter Artikel beschäftigt sich mit der Wirkung von aufeinanderfolgenden Doppelbelichtungen und die mögliche praktische Auswertung (H. FRIESER und J. EGGER). Der Diffusionslichthof und die verschiedenen Empfindlichkeitskriterien stehen im Mittelpunkt weiterer Berichte. Von den fünf Beiträgen über Fragen der Farbenphotographie sei die sehr anschauliche Einführung von E. HELLWIG über Farbverbesserungen im Agfacolor-Negativ-Positiv-Verfahren durch Farbmasken hervorgehoben. An praktischen Problemen wird unter anderem über die automatische Belichtungsregelung bei Dunkelkammergeräten, speziell beim Agfa-Variomat, und über das Silbersalzdiffrusionsverfahren (Copyrapid-Verfahren der AGFA) berichtet. Drei Abhandlungen sind der Herstellung und den Eigenschaften von Agfa-Magneton-Bändern und -Filmen gewidmet.

Der Band II enthält 24 Einzelbeiträge, von denen einige als direkte Weiterführung von im Band I enthaltenen Beiträgen anzusehen sind. Dazu gehören der reichbebilderte Artikel von E. KLEIN über elektronenmikroskopische Untersuchungen an photographischen Schichten, die Beiträge über die Veränderung der Papiergradation durch Doppelbelichtungen (J. EGGER), über die Wiedergabe kleiner Details beim Kopierprozeß (H. FRIESER) und über die Automatisierung des Kopierprozesses (F. BIEDERMANN und R. WICK). Einen besonderen Platz nimmt eine Gruppe von drei Bei-

trägen ein, in denen über Untersuchungen an Halogensilberkristallen berichtet wird (R. MATEJEC, E. KLEIN). Sie zeigen das Bestreben, in Anlehnung an die Halbleiterphysik die Eigenschaften der AgBr- und AgCl-Kristalle noch besser kennenzulernen. Der zweite neu berücksichtigte Themenkreis ist die Anwendung der Übertragungstheorie in der Photographie. E. ZEIDLER gibt eine längere Einführung in das Gebiet, und H. FRIESER zeigt die Anwendung auf ein praktisches Problem. Weitere Abhandlungen befassen sich mit klassischen Problemen der wissenschaftlichen Photographie (Zahl der Keime im latenten Bild, Größe der entwickelten Silberaggregate, Entwickler usw.). Ohne daß wiederum alle behandelten Themen aufgeführt werden können, sei doch noch der Artikel von H. BERGHAUS über die Wandlung der Papiergradation durch Zusatzbelichtung hervorgehoben, da mit der Auswertung dieses Verfahrens in Großkopieranstalten zu rechnen ist.

Beide Bände sind vom Springer-Verlag in gewohnter Weise in sehr guter Aufmachung herausgebracht worden. Sie sind jedem zu empfehlen, der sich für die aktuellen Probleme der wissenschaftlichen Photographie interessiert.

P. SÜTTITZ

Handbuch der Physik. Hrsg. von S. FLÜGGE. Bd. XII: Thermodynamik der Gase. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1958. VI, 686 S. u. 253 Fig. Gzl. DM 154.—.

Der Band enthält vier englisch geschriebene Artikel von J. S. ROWLINSON, J. E. MAYER, H. GRAD und D. ALPERT und zwei deutsche Artikel von L. WALDMANN und R. JAECKEL.

ROWLINSON behandelt die Eigenschaften vollkommener und realer Gase und Gasmischungen vom phänomenologisch-thermodynamischen Standpunkt aus. Die experimentellen Methoden zur Bestimmung der thermodynamischen Eigenschaften der Gase bei hohen und bei niedrigen Drucken und bei der Kondensation, sowie ältere und moderne empirische Zustandsgleichungen werden ausführlich diskutiert. Zahlreiche Abbildungen und Diagramme unterstützen die Darstellung.

In einem rein theoretischen Artikel über reale Gase geht MAYER von der allgemeinen Statistik im Sinne von GIBBS aus und legt meist die große kanonische Gesamtheit zugrunde. Die Berechnung der thermodynamischen Potentiale aus der Zustandssumme und die Berechnung der Zustandssumme für die inneren und für die Translationsfreiheitsgrade, letztere nach der vom Verfasser stammenden cluster-Methode, werden durchgeführt. Die klassische Statistik wird für vollkommene und reale Gase, die beiden Quantenstatistiken werden für vollkommene Gase entwickelt. Die quantentheoretischen Betrachtungen sind wesentlich weiter durchgeführt als in der „Statistical Mechanics“ von J. E. MAYER und M. GOEPFERT-MAYER.

Der Artikel von GRAD kann als eine Theorie der Boltzmannschen Stoßgleichung bezeichnet werden. Er bringt die theoretischen Grundlagen, eine sehr eingehende Kritik dieser Grundlagen, die Eigenschaften der Boltzmann-Gleichung, die Existenztheorie ihrer Lösungen und die von HILBERT, CHAPMAN-ENSKOG und anderen angegebenen Lösungsverfahren.

Fast ein Drittel des Bandes nimmt mit 220 Seiten der Artikel von WALDMANN ein, in dem die Transportscheinungen in Gasen in anschaulicher Weise vom theoretischen und experimentellen Standpunkt aus behandelt werden. Auch hier werden die Grundlagen der Boltzmann-Gleichung diskutiert. Hauptsächlich werden 1-atomige Gase und deren Gemische betrachtet, zunächst von der klassischen Statistik aus, dann aber wird auch auf die bei den Transportscheinungen auftretenden Quanteneffekte eingegangen. Zum Schluß werden mehratomige Gase vom quantenmechanischen Standpunkt aus betrachtet.

Die beiden Artikel von JAECKEL und ALPERT bringen die Grundlagen und die experimentellen Methoden der Erzeugung und Messung hoher und höchster Vakua. Ausführlich werden die grundsätzlichen Gesichtspunkte, die für Vakuum-Anlagen wesentlich sind, auseinandergesetzt und mit Hilfe von zahlreichen Abbildungen und Diagrammen die praktisch benutzten Formen von Pumpen und Manometern beschrieben.

Jeden der 6 Autoren kann man auf dem von ihm behandelten Gebiet als führenden Wissenschaftler bezeichnen. Die Artikel geben daher alle bis zum gegenwärtigen Zeitpunkt erzielten wichtigen Fortschritte wieder.

Wenn man den Inhalt des Bandes mit den entsprechenden Artikeln des alten Handbuchs von GEIGER-SCHEEL vergleicht, so kann man feststellen, welche erstaunlich großen Fortschritte in der Thermodynamik der Gase in den letzten 3 Jahrzehnten erzielt wurden, obgleich dieses Gebiet ja in dieser Zeit nicht gerade im Mittelpunkt des physikalischen Interesses gestanden hat.

Man vermißt in einer so ausführlichen Darstellung der Thermodynamik der Gase eine Behandlung der thermischen Gleitung von Gasen und der Radiometerkräfte (deren Theorie nur für den einfachen Fall des Knudsen-Gases bei den Vakuummetern entwickelt wird). Ein Artikel über Gase bei hohen Temperaturen (thermische Plasmen) ist in Bd. XXII enthalten. Vorgänge in Gasen vom Standpunkt der Thermodynamik irreversibler Prozesse werden in Bd. III im Rahmen der allgemeinen Theorie irreversibler Prozesse behandelt.

Ein äußerer Mangel, der leider auch bei früher erschienenen Bänden des Handbuchs festzustellen war, ist die Kürze des Inhaltsverzeichnisses. Es kommt mehrfach vor, daß Abschnitte von mehr als 25 bis fast 50 Seiten Länge durch ein einziges Stichwort im Inhaltsverzeichnis wiedergegeben werden. Die Benutzung des inhaltlich meist so gediegenen und wertvollen und äußerlich so vorzüglich ausgestatteten Handbuchs als Nachschlagewerk würde durch ausführlichere Inhaltsverzeichnisse wesentlich erleichtert werden.

G. HETTNER

Einstein, A.: Grundzüge der Relativitätstheorie. 1. Aufl., zugleich 3. erweiterte Auflage der „Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie“. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn 1956, 112 S. u. 6 Abb. Geh. 10,80 DM.

Diese Schrift, in deren zweitem Anhang EINSTEIN kurz vor seinem Tode seine „Relativistische Theorie des nicht-symmetrischen Feldes“ erstmalig niedergelegt hat, die also bis zur weitesten Entwicklung seiner Relativitätstheorie führt, ist gerade für jemanden, der wie der Technische Physiker Nichtfachmann ist, zur Einführung besonders geeignet. Denn sie enthält nicht nur alles Wesentliche über die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie, sondern EINSTEIN führt den Leser auch in alle zum Verständnis seiner Theorie erforderlichen mathematischen Begriffe und Beziehungen ein und setzt dabei nur die Kenntnis der Elemente der höheren Mathematik voraus. So wird die Bedeutung der euklidischen Geometrie, der Invarianz, der Vektoren, der Tensoren dar-

gelegt und an Beispielen erläutert. Ob jemand, dem diese Begriffe fremd sind, nach EINSTEINS wunderbar klarer Einleitung nun die folgenden Kapitel über spezielle und allgemeine Relativitätstheorie ohne Schwierigkeiten verstehen kann, ist freilich für jemanden, der wie der Referent etwas Fachmann ist, schwer zu beurteilen. — In dem neuen Anhang I „Zur kosmologischen Problem“ ist einleitend betont, daß die Rotverschiebung der Spektrallinien durch das (negative) Gravitationspotential des Erzeugungsortes überzeugend an den neu entdeckten „Zwergsternen“ nachgewiesen wurde, deren mittlere Dichte etwa 10^4 mal so groß wie die des Wassers ist. Die Rotverschiebung ist daher an ihnen etwa 20 mal so groß wie bei der Sonne. Weiter wird behandelt die Bewegungssätze als Folge der Feldgleichungen und der Aufbau des Kosmos. Es ergibt sich, daß das störende „kosmologische Glied“ der Feldgleichungen unnötig ist, wenn man — wofür vieles spricht — die zeitliche Veränderlichkeit des metrischen Abstandes d starrer Massenpunkte zuläßt. (Das unbefriedigende Ergebnis EINSTEINS, daß der Anfang der Expansion nur 10^9 Jahre zurückliegt, ist durch neue Messungen betreffs der Hubble Expansion überholt.)

Betreffs des Anhangs II sagt EINSTEIN selbst in einer Vorbemerkung unter anderem: „Es ist mir nämlich gelungen, die Ableitungen sowie die Form der Feldgleichungen zu vereinfachen. Die ganze Theorie gewinnt dadurch an Durchsichtigkeit, ohne daß der Inhalt eine Änderung erfährt.“ — Möchte jeder Leser von dieser Einsteinschen Schrift ebenso tief beeindruckt sein wie der Referent! W. MEISSNER

Weinberg, A. M., and E. P. Wigner: The Physical Theory of Neutron Chain Reactors. Chicago, Ill.: Chicago University Press 1958. 800 S. u. zahlr. Abb. Geb. \$ 15.—

Zwei namhafte theoretische Physiker haben hier aus der Erfahrung ihrer langjährigen mit der technischen Praxis verbundenen Tätigkeit, in der sie führend am amerikanischen Atomenergieprogramm beteiligt waren, ein umfangreiches Buch über die Physik der Atomreaktoren geschrieben. Dies geschieht glücklicherweise nicht in der abstrakten Sprache der Theoretiker, sondern anschaulicher und verständlicher, als dies manchen spezialisierten Praktiker hätte gelingen können. Die Autoren verstanden es dabei, den zu einem großen Teil konventionellen Stoff mit einer solchen Fülle von originellen und kritischen Gedanken zu durchsetzen, daß es sich sehr wohl lohnt, auch jene „klassischen“ Abschnitte der Theorie, etwa über die Diffusionsgleichung oder über die Fermi-Theorie, eingehen zu studieren. Auf der anderen Seite geht das Werk in großer Umfang über die herkömmlichen Darstellungen hinaus, wie etwa in dem ausführlichen ersten Abschnitt über die Grundlagen der Theorie von Neutronen-Wirkungsquerschnitten. Diesem Teil, der fast ein Viertel des Buches ausmacht, schließen sich zunächst die Abschnitte an, welche die verschiedenen Methoden der Diffusions-, Transport- und Moderationstheorie darstellen. (Dabei werden einige Gegenstände behandelt, die in den meisten Lehrbüchern zu kurz kommen, so etwa die Einstellung des thermischen Gleichgewichts bei der Moderation, oder das Milne-Problem). Die zweite Hälfte des Werkes schließlich befaßt sich mit der eigentlichen Reaktortheorie (kritische Gleichung, Reflektortheorie, Störungs- und Regelttheorie, Reaktorstabilität und -dynamik), wobei immer wieder darauf gelegt wird, die grundlegenden physikalischen Unterschiede bei den verschiedenen Reaktortypen (Natururan-Systeme, angereicherte Systeme, usw.) hervorzuheben. Die letzten Kapitel, deren Inhalt, wie im Vorwort steht, „die erste Liebe der Autoren galt“, behandeln die verschiedenen physikalischen Konzepte, die den komplizierten Berechnungsverfahren für die kritischen Faktoren k , ρ , ϵ und M^2 in einem heterogenen Reaktor zugrunde liegen. Alle Theorien werden soweit möglich, mit experimentellem Material verglichen. Eine reichliche Ausstattung mit Literaturhinweisen und Tabellen macht das Buch zugleich zu einem Nachschlagewerk.

T. SPRINGER